

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

А. З. РЫВКИН и Е. С. КУНИЦКАЯ

**ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ
ПО
МАТЕМАТИЧЕСКОМУ
АНАЛИЗУ**

Часть II

**ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

учпедгиз · 1962

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

Московский государственный заочный педагогический институт

А. З. РЫВКИН и Е. С. КУНИЦКАЯ

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

ЧАСТЬ II

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

*ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

Москва 1962



ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий выпуск задачника-практикума составлен применительно к учебнику Г. М. Фихтенгольца «Основы математического анализа», том I. Цель его — научить студента-заочника технике интегрирования и умению решать различные задачи на приложения определенных интегралов.

При составлении задачника-практикума мы прежде всего исходили из учета тех довольно больших трудностей, с которыми встречаются многие студенты-заочники при изучении курса математического анализа. Основная из этих трудностей состоит в том, что изучающий заочно высшую математику, как правило, лишен возможности систематически получать устную консультацию преподавателя. Мы больше всего старались предвидеть те «трудные места», которые могут встретиться студенту на пути овладения методами интегрирования, очень осторожно подходили к подбору задач, к постепенному повышению их трудности. Особенно нелегко было выбрать задачи, к которым следует дать подробные решения. В самом деле, каждая решенная задача должна содержать некоторые новые элементы, с которыми студент до сих пор еще не встречался, причем таких новых элементов должно быть в задаче не очень много. Кроме того, все решенные типичные задачи в совокупности должны обеспечить студенту возможность самостоятельно разобраться в особенностях того или иного метода решения задач и справиться со всеми задачами, предлагаемыми для самостоятельного решения.

Мы рекомендуем студенту следующий порядок работы. Прежде всего необходимо глубоко изучить указанный в начале каждого параграфа материал из учебника. Это значит разобраться в указанном материале настолько хорошо, чтобы суметь самому сформулировать

каждое определение, каждую теорему, провести ее доказательство и решить все приведенные в учебнике примеры и задачи. Затем следует подробно разобрать все приведенные задачи с решениями, стараясь не упустить ни одной детали, ни одного замечания. Лишь после этого можно приступить к самостоятельному решению предлагаемых задач.

Каждый студент-заочник обязан решить все задачи, кроме дополнительных; это составляет необходимый минимум для получения зачета по соответствующему разделу курса математического анализа.

При составлении настоящего выпуска авторы использовали многие учебники, учебные пособия и сборники задач по курсу математического анализа.

Во втором издании после каждой главы введены дополнительные задачи, внесены и другие изменения и дополнения с учетом многих полученных замечаний. Исправлены замеченные опечатки как в тексте, так и в ответах.

Авторы выражают свою признательность всем преподавателям, приславшим свои замечания на первое издание этого выпуска задачника-практикума.

Авторы

Первообразная функция (неопределенный интеграл)

Г Л А В А I

ОСНОВНЫЕ СПОСОБЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

§ 1. Способ непосредственного интегрирования

Предварительно изучите по учебнику Г. М. Фихтенгольца «Основы математического анализа», т. I, главу X, п° 155—159. Обратите особое внимание на примеры, решенные в п° 159.

Способ непосредственного интегрирования опирается на таблицу основных интегралов и простейшие правила интегрирования.

Т а б л и ц а 1. Таблица основных интегралов

$$1) \int u^k du = \frac{u^{k+1}}{k+1} + C \quad (k \neq -1), \quad 2) \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C,$$

$$3) \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad 4) \int e^u du = e^u + C,$$

$$5) \int \cos mu du = \frac{1}{m} \sin mu + C \quad (m \neq 0),$$

$$6) \int \sin mu du = -\frac{1}{m} \cos mu + C \quad (m \neq 0),$$

$$7) \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C, \quad 8) \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C,$$

$$9) \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{u}{a} + C_1 \end{cases} \quad (a > 0),$$

$$10) \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{u}{a} + C, \\ -\arccos \frac{u}{a} + C_1, \end{cases}$$

$$11) \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C,$$

$$12) \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C.$$

Все эти формулы справедливы независимо от того, является ли u независимой переменной, либо какой угодно функцией этой независимой переменной. По поводу формул 5), 6), 9), 11) и 12) смотрите учебник п° 159.

Простейшие правила интегрирования

$$\text{I. } \int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

(здесь a — постоянная величина, $a \neq 0$).

$$\text{II. } \int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx.$$

III. Если

$$\int f(u) du = F(u) + C,$$

то

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C_1, \text{ где } a \neq 0.$$

Очень часто встречаются случаи, когда $a=1$ либо $b=0$.

При отыскании неопределенных интегралов полезно помнить таблицу дифференциалов, но не в том виде, как она дана в учебнике (см. п° 91), а в немного преобразованном следующем виде (здесь как бы правые и левые части поменялись местами).

Таблица 2. Таблица дифференциалов

$$1) a dx = d(ax + b),$$

$$3) \frac{dx}{x} = d \ln |x|,$$

$$2) x^k dx = d \frac{x^{k+1}}{k+1},$$

$$4) a^x dx = d \frac{a^x}{\ln a},$$

$$2') \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 d \sqrt{x},$$

$$5) ae^x dx = d(ae^x + b),$$

$$6) \cos x dx = d \sin x,$$

$$9) \frac{dx}{\sin^2 x} = -d \operatorname{ctg} x,$$

$$7) \sin x dx = -d \cos x,$$

$$10) \frac{dx}{x^2 + 1} = d \operatorname{arctg} x,$$

$$8) \frac{dx}{\cos^2 x} = d \operatorname{tg} x,$$

$$11) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d \operatorname{arcsin} x.$$

Этой таблицей мы в дальнейшем будем широко пользоваться. При этом представление, например, выражения $\frac{1}{x} dx$ в виде $d \ln |x|$ или выражения $\cos x dx$ в виде $d \sin x$ мы будем называть подведением функций соответственно $\frac{1}{x}$ или $\cos x$ под знак дифференциала.

1. Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{5}{3}} \sqrt{x}}.$$

Решение. Записываем подынтегральную функцию в виде степени с отрицательным дробным показателем и применяем формулу 1 из таблицы 1:

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{5}{3}} \sqrt{x}} = \int x^{-\frac{4}{3}} dx = -\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + C.$$

2. Найти интеграл:

$$\int \frac{5 + 7x + x^2}{x \sqrt{x}} dx.$$

Решение. Числитель подынтегральной функции делим почленно на знаменатель. Затем применяем правила II, I и формулу 1 из таблицы 1:

$$\begin{aligned} \int \frac{5 + 7x + x^2}{x \sqrt{x}} dx &= \int \left(5x^{-\frac{3}{2}} + 7x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \\ &= \int 5x^{-\frac{3}{2}} dx + \int 7x^{-\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx = 5 \int x^{-\frac{3}{2}} dx + \\ &+ 7 \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx = 5 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + 7 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \\ &= -\frac{10}{\sqrt{x}} + 14 \sqrt{x} + \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C. \end{aligned}$$

3. Найти интеграл:

$$\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx.$$

Решение. Возводим числитель в квадрат и делим почленно на знаменатель. Далее поступаем, как в задаче 2:

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx + 2 \int x^{\frac{1}{2}} dx + \\ &+ \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C. \end{aligned}$$

4. Найти интеграл:

$$\int \frac{6x^3 + x^2 - 2x + 1}{2x - 1} dx.$$

Решение. Сначала исключаем целую часть рациональной дроби, деля числитель на знаменатель. Имеем:

$$\frac{6x^3 + x^2 - 2x + 1}{2x - 1} = 3x^2 + 2x + \frac{1}{2x - 1}.$$

Применяя теперь правило II, получим:

$$\int \frac{6x^3 + x^2 - 2x + 1}{2x - 1} dx = \int 3x^2 dx + \int 2x dx + \int \frac{dx}{2x - 1}. \quad (1)$$

Первые два интеграла правой части (1) вычисляются по формуле 1 из таблицы 1:

$$\int 3x^2 dx + \int 2x dx = x^3 + x^2 *).$$

К третьему же интегралу правой части применяем правило III интегрирования. В нашем случае $f(u) = \frac{1}{u}$. Поэтому на основании формулы 2 из таблицы 1 имеем:

$$\int \frac{dx}{2x - 1} = \frac{1}{2} \ln |2x - 1|.$$

Итак:

$$\int \frac{6x^3 + x^2 - 2x + 1}{2x - 1} dx = x^3 + x^2 + \frac{1}{2} \ln |2x - 1| + C.$$

Укажем другой способ рассуждений при вычислении третьего интеграла в правой части равенства (1).

*) Произвольную постоянную мы учтем позднее при написании окончательного ответа. Мы будем поступать так и в дальнейшем.

Легко видеть, что

$$\int \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \int \frac{2 dx}{2x-1}.$$

Интеграл не изменился, так как мы подынтегральное выражение помножили на 2 и одновременно интеграл разделили на 2. Если мы теперь множитель 2 при dx подведем под знак дифференциала (см. формулу 1 из табл. 2), то получим:

$$\int \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u},$$

где $u = 2x - 1$. Мы получили табличный интеграл (см. формулу 2 из табл. 1).

Итак, окончательно

$$\int \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \ln |2x-1| + C_1.$$

З а м е ч а н и е. Если подынтегральная функция представляет собой рациональную дробь, у которой степень многочлена числителя больше или равна степени многочлена знаменателя, то прежде всего следует исключить целую часть путем деления числителя рациональной дроби на знаменатель.

5. Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x}}.$$

Р е ш е н и е. Освобождаемся от иррациональности в знаменателе:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x}} &= \int \frac{(\sqrt{x+4} + \sqrt{x}) dx}{(\sqrt{x+4} - \sqrt{x})(\sqrt{x+4} + \sqrt{x})} = \\ &= \frac{1}{4} \int \sqrt{x+4} dx + \frac{1}{4} \int \sqrt{x} dx = \frac{1}{4} \int (x+4)^{\frac{1}{2}} dx + \\ &+ \frac{1}{4} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{6} (x+4)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6} x^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

Мы воспользовались здесь правилом III и формулой 1 из таблицы 1.

6. Найти интеграл:

$$\int \left(3 \sin 9x + \frac{10}{\cos^2 5x} \right) dx.$$

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} \int \left(3 \sin 9x + \frac{10}{\cos^2 5x} \right) dx &= \int 3 \sin 9x dx + \int \frac{10 dx}{\cos^2 5x} = \\ &= \frac{1}{3} \int \sin 9x d 9x + 2 \int \frac{d 5x}{\cos^2 5x} = -\frac{1}{3} \cos 9x + 2 \operatorname{tg} 5x + C. \end{aligned}$$

Мы использовали здесь правило II; подведением соответствующего постоянного множителя под знак дифференциала мы привели интегралы к табличным (см. формулы 6 и 7 из табл. 1).

7. Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 9}.$$

Решение. Чтобы свести данный интеграл к табличному (см. формулу 9 из табл. 1), достаточно подвести под дифференциал множитель $\sqrt{2}$ и разделить весь интеграл на $\sqrt{2}$. Тогда, сравнив полученный интеграл с формулой 9, увидим, что $u = x\sqrt{2}$, $a = 3$. Следовательно, получим:

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 9} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(x\sqrt{2})}{(x\sqrt{2})^2 + 3^2} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{3} + C.$$

Замечание. Совершенно аналогично следует поступать с интегралами вида

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{b^2 x^2 \pm a^2}}, \quad \int \frac{dx}{b^2 x^2 - a^2}.$$

Если в каждом из них мы введем под дифференциал множитель b и разделим интеграл на этот множитель, то приведем данные интегралы к табличным (см. формулы 10, 11, 12 в табл. 1), причем $u = bx$.

8. Найти интеграл:

$$\int (2x + 5)^{27} dx.$$

Решение. Вряд ли кому-нибудь придет в голову мысль возвести данный двучлен в 27-ю степень и затем

интегрировать сумму из 28-ми слагаемых, хотя такой путь вполне законен. Данный интеграл берется совсем легко с помощью правила III и формулы 1 из таблицы 1. В самом деле, имеем:

$$\int (2x + 5)^{27} dx = \frac{1}{56} (2x + 5)^{28} + C.$$

Данный интеграл можно свести к табличному, если ввести множитель 2 под дифференциал и разделить весь интеграл на 2:

$$\begin{aligned} \int (2x + 5)^{27} dx &= \frac{1}{2} \int (2x + 5)^{27} \cdot 2 dx = \frac{1}{2} \int (2x + 5)^{27} d(2x + 5) = \\ &= (\text{см. формулу 1 из табл. 2}) = \frac{1}{2} \int u^{27} du, \end{aligned}$$

где $u = 2x + 5$.

Способ непосредственного интегрирования дает возможность брать интегралы вида

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx.$$

В самом деле, так как $f'(x) dx = df(x)$, то

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \int \frac{du}{u}, \quad \text{где } u = f(x).$$

Окончательно имеем:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C.$$

Итак, если числитель подынтегральной функции равен производной ее знаменателя (или отличается от нее постоянным множителем), то интеграл равен логарифму модуля знаменателя плюс произвольная постоянная.

Рассмотрим несколько задач.

9. Найти интеграл:

$$\int \operatorname{ctg} x dx.$$

Решение. Имеем:

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + C, \quad (2)$$

так как функция $\cos x$ в числителе есть производная знаменателя $\sin x$.

Применяя к равенству (2) правило III, мы легко возьмем и более сложный интеграл:

$$\int \operatorname{ctg}(3x + 2) dx = \frac{1}{3} \ln |\sin(3x + 2)| + C.$$

10. Найти интеграл:

$$\int \frac{x + 1}{3x^2 + 2} dx.$$

Решение. Имеем:

$$\int \frac{(x + 1) dx}{3x^2 + 2} = \int \frac{x}{3x^2 + 2} dx + \int \frac{dx}{3x^2 + 2}. \quad (3)$$

Так как производная знаменателя равна $6x$, то достаточно в первом интеграле помножить числитель на 6, а весь интеграл разделить на 6:

$$\int \frac{x dx}{3x^2 + 2} = \frac{1}{6} \int \frac{6x}{3x^2 + 2} dx = \frac{1}{6} \ln(3x^2 + 2).$$

Второй интеграл равенства (3) берется аналогично интегралу задачи 7:

$$\int \frac{dx}{3x^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(x\sqrt{3})}{(x\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Окончательно получим:

$$\int \frac{x + 1}{3x^2 + 2} dx = \frac{1}{6} \ln(3x^2 + 2) + \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + C.$$

$$11. \int \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 7} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3e^{3x}}{e^{3x} + 7} dx = \frac{1}{3} \ln(e^{3x} + 7) + C,$$

так как после умножения числителя на 3 он стал равен производной знаменателя.

$$12. \int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx = \ln(1 + \sin^2 x) + C,$$

так как числитель подынтегральной функции равен производной знаменателя.

В задачах 13—26, пользуясь формулами таблицы I и правилами интегрирования I и II, найти заданные интегралы.

$$\begin{aligned}
13. & \int \frac{dx}{x\sqrt{x}}. & 14. & \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}. & 15. & \int \left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{x^5} \right) dx. \\
16. & \int (\sqrt{x} - 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx. \\
17. & \int x(x+a)(x+b) dx. \\
18. & \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx. & 19. & \int \frac{2x^2 - 5x + 7}{x} dx. \\
20. & \int \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 dx. & 21. & \int \frac{(y+2)^2}{y} dy. \\
22. & \int (\sqrt{a} + \sqrt{z})^2 dz. & 23. & \int \left(e^x - \frac{5}{2+x^2} \right) dx. \\
24. & \int \left(2^x - \frac{2}{\sqrt{3-x^2}} \right) dx. & 25. & \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx. \\
26. & \int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx.
\end{aligned}$$

У к а з а н и е. В задаче 25 числитель 1 подынтегральной функции замените по формуле $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ и разделите почленно на знаменатель. В задаче 26 воспользуйтесь формулой $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ и разложите на множители.

В задачах 27 — 30 найти интегралы, предварительно исключив целую часть рациональной дроби.

$$\begin{aligned}
27. & \int \frac{2-5x^2}{2+x^2} dx. & 28. & \int \frac{x^4 dx}{x^2-2}.
\end{aligned}$$

В задачах 29 — 41, пользуясь правилом интегрирования III или подведением под знак дифференциала, найти заданные интегралы.

$$\begin{aligned}
29. & \int \frac{2-5x}{2+x} dx. & 30. & \int \frac{x^2+3}{3x^2+2} dx. \\
31. & \int \frac{dx}{(x+1)^2}. & 32. & \int \frac{dx}{(x+1)^n}. & 33. & \int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}. \\
34. & \int \frac{dx}{\sin^2 3x}. & 35. & \int \frac{dx}{\sqrt{x+7} + \sqrt{x}}. \\
36. & \int (e^y + e^{-y})^2 dy. & 37. & \int (5 + 3\sin 5x + 2\cos 3x) dx.
\end{aligned}$$

$$38. \int \left(1 - \frac{1}{x}\right)^8 \frac{dx}{x^2}.$$

$$39. \int (e^{ax} - e^{-ax})^2 dx.$$

$$40. \int \sin(3x + 5) dx.$$

$$41. a) \int (3x - 2)^{15} dx.$$

$$б) \int e^{5x + 3} dx.$$

При решении задач 42—47 посмотрите решения задач 9—12.

$$42. \int \operatorname{tg} x dx.$$

$$43. \int \frac{dx}{\sin x \cos x}.$$

У к а з а н и е. При решении задачи 43 воспользуйтесь указанием к задаче 25.

$$44. \int \frac{x^2 dx}{x^3 + 1}.$$

$$45. \int \frac{\sin 2x dx}{2\cos^2 x + 3}.$$

$$46. \int \frac{6x - 7}{3x^2 - 7x + 3} dx.$$

$$47. \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx.$$

В задачах 48, 49 подведите предварительно числитель подынтегральной функции под знак дифференциала.

$$48. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$49. \int \frac{(2x + a) dx}{\sqrt{x^2 + ax + b}}.$$

В задачах 50, 51 подведите предварительно множители x , x^2 под знак дифференциала.

$$50. \int x \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

$$51. \int x^2 \sqrt{x^3 - 1} dx.$$

§ 2. Способ замены переменной (способ подстановки)

Предварительно изучите по учебнику Г. М. Фихтенгольца главу X, п° 160—161. Тщательно разберитесь в примерах, решенных в п° 161, и попробуйте примеры 1—5 этого пункта решить введением под знак дифференциала (см. стр. 7). В примере 6 этого пункта учебника вы легко узнаете формулу 11 из нашей таблицы 1.

Способ замены переменной или способ подстановки — один из наиболее сильных приемов интегрирования. К сожалению, нельзя дать общего ответа на вопрос: как выбрать удачную подстановку. В процессе решения задач укажем некоторые приемы для важных частных случаев.

Заметим, что способом подстановки в самых простейших случаях мы уже пользовались в § 1 при решении задач с применением правила III интегрирования и введением под знак дифференциала.

52. Найти интеграл:

$$\int \sqrt[4]{4x-5} \, dx.$$

Решение. Пробуем подстановку

$$4x-5 = t. \quad (1)$$

Дифференцируя последнее равенство, получаем:

$$4 \, dx = dt, \text{ откуда } dx = \frac{1}{4} dt.$$

Заданный интеграл преобразуется теперь к табличному (см. формулу 1, табл. 1) и легко берется:

$$\begin{aligned} \int \sqrt[4]{4x-5} \, dx &= \frac{1}{4} \int \sqrt[4]{t} \, dt = \frac{1}{4} \int t^{\frac{1}{4}} \, dt = \\ &= \frac{1 \cdot 4}{4 \cdot 5} t^{\frac{5}{4}} + C = \frac{1}{5} \sqrt[4]{t^5} + C. \end{aligned}$$

Возвращаясь теперь к первоначальной переменной x по формуле (1), находим:

$$\int \sqrt[4]{4x-5} \, dx = \frac{1}{5} \sqrt[4]{(4x-5)^5} + C.$$

Мы могли бы здесь сразу воспользоваться правилом III.

Покажем, как с помощью подстановки берется интеграл $\int (2x+5)^{27} \, dx$ (см. выше задачу 8 на стр. 10). Берем подстановку $2x+5 = z$. Дифференцируя, получим $2 \, dx = dz$, откуда $dx = \frac{1}{2} dz$. Заданный интеграл примет вид:

$$\int (2x+5)^{27} \, dx = \frac{1}{2} \int z^{27} \, dz = \frac{1}{56} z^{28} + C = \frac{1}{56} (2x+5)^{28} + C.$$

Таким образом, если подынтегральная функция имеет вид $f(ax+b)$, то удобна подстановка $ax+b = t$.

53. Найти интеграл:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} \cos x \, dx.$$

Решение. Возьмем подстановку

$$\sin x = u.$$

Дифференцируем это равенство:

$$\cos x \, dx = du.$$

Теперь наш интеграл примет вид:

$$\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{du}{\sqrt[3]{u^2}} = \int u^{-\frac{2}{3}} du.$$

Итак, с помощью подстановки $\sin x = u$ мы преобразовали заданный интеграл к табличному, который легко берется по формуле 1 таблицы 1:

$$\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int u^{-\frac{2}{3}} du = 3u^{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{\sin x} + C.$$

После интегрирования мы снова вернулись к первоначальному переменному x .

При решении задачи 53 можно рассуждать и так. В заданном интеграле, вводя множитель $\cos x$ под знак дифференциала (см. формулу 6 из табл. 2), получим:

$$\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{d \sin x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$$

Мы видим, что теперь под знаком интеграла все выражено через $\sin x$ и сама собой напрашивается подстановка $\sin x = u$.

54. Найти интеграл:

$$\int (\operatorname{tg} x + 3 \operatorname{tg}^2 x) \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Решение. Берем подстановку

$$\operatorname{tg} x = t.$$

Дифференцируя, получим:

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = dt.$$

Заданный интеграл после этого берется до конца. В самом деле, имеем:

$$\begin{aligned} \int (\operatorname{tg} x + 3 \operatorname{tg}^2 x) \frac{dx}{\cos^2 x} &= \int (t + 3t^2) dt = \int t \, dt + \int 3t^2 \, dt = \\ &= \frac{t^2}{2} + t^3 + C = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x + C. \end{aligned}$$

Здесь также можно было сначала подвести под дифференциал множитель $\frac{1}{\cos^2 x}$ (см. формулу 8 из табл. 2).

Если подынтегральное выражение можно разбить на два сомножителя, в одном из которых довольно легко по таблице 2 распознать дифференциал некоторой функции $\varphi(x)$, а другой сомножитель после подстановки $\varphi(x) = t$ превращается в такую функцию от t , которую мы умеем интегрировать, то такая подстановка окажется удачной.

55. Найти интеграл:

$$\int [\sin(x^2 + 1)] x dx.$$

Решение. В сомножителе $2x dx$ легко распознать дифференциал функции $x^2 + 1$. Поэтому берем подстановку

$$x^2 + 1 = t.$$

Отсюда $2x dx = dt$ и $x dx = \frac{1}{2} dt$. Мы имеем:

$$\begin{aligned} \int [\sin(x^2 + 1)] x dx &= \frac{1}{2} \int \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t + C = \\ &= -\frac{1}{2} \cos(x^2 + 1) + C. \end{aligned}$$

56. Найти интеграл:

$$\int \frac{1}{\sin^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Решение. В таблице 2 находим формулу 2'. Поэтому берем подстановку

$$\sqrt{x} = t.$$

Отсюда

$$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \quad \text{и} \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 dt.$$

Итак,

$$\int \frac{1}{\sin^2 \sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -2 \operatorname{ctg} t + C = -2 \operatorname{ctg} \sqrt{x} + C.$$

57. Найти интеграл:

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{1 + \ln x}} \frac{dx}{x}.$$

Решение. Формула 3 таблицы 2 подсказывает нам, что здесь полезна подстановка

$$\ln x = t, \text{ откуда } \frac{dx}{x} = dt.$$

Наш интеграл примет вид:

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{1 + \ln x}} \frac{dx}{x} = \int \frac{t}{\sqrt{1 + t}} dt.$$

В таблице 1 мы не находим подходящего интеграла. Поэтому пробуем применить еще подстановку, которая бы освободила подынтегральную функцию от радикала:

$$\sqrt{1 + t} = z,$$

откуда

$$1 + t = z^2, \quad t = z^2 - 1, \quad dt = 2z dz.$$

Подставив все это в последний интеграл, получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{t}{\sqrt{1 + t}} dt &= \int \frac{z^2 - 1}{z} 2z dz = \int (2z^2 - 2) dz = \\ &= \frac{2}{3} z^3 - 2z + C = \frac{2}{3} (\sqrt{1 + t})^3 - 2 \sqrt{1 + t} + C = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{(1 + \ln x)^3} - 2 \sqrt{1 + \ln x} + C. \end{aligned}$$

Мы после интегрирования вернулись сначала к переменной t , а затем к первоначальной переменной x .

Внимательно анализируя решение этой задачи, мы замечаем, что сразу пришли бы к цели, если бы воспользовались подстановкой

$$\sqrt{1 + \ln x} = z.$$

Рекомендуем читателю решить задачу 57 с помощью этой подстановки.

58. Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}}.$$

Решение. Берем подстановку

$$\sqrt{1 + e^x} = u.$$

Выразим теперь dx через новую переменную u :

$$1 + e^x = u^2, \quad e^x = u^2 - 1,$$

$$e^x dx = 2u du, \quad dx = \frac{2u du}{e^x} = \frac{2u du}{u^2 - 1}.$$

Подставив в заданный интеграл, получим:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} &= \int \frac{2u du}{u(u^2-1)} = 2 \int \frac{du}{u^2-1} = \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C = \\ &= \ln \left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} \right) + C\end{aligned}$$

(см. формулу 12 из табл. 1).

59. Найти интеграл:

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}} dx.$$

Решение. Освободимся от иррациональности в числителе, помножив числитель и знаменатель подынтегральной функции на $\sqrt{1+x}$). Получим:

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} dx = \int \frac{(x+1)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

так как по условию $1+x > 0$.

Итак,

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}} dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Кажущееся сходство полученных двух интегралов обманчиво. Второй из них мы легко находим в таблице 1 (см. формулу 10 при $a=1$):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$

Первый интеграл берется подстановкой

$$\sqrt{1-x^2} = u.$$

Дифференцируя, получим:

$$-\frac{2x dx}{2\sqrt{1-x^2}} = du, \text{ откуда } \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -du.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = - \int du = -u = -\sqrt{1-x^2}.$$

*) Такой прием часто бывает очень полезен.

Таким образом, окончательно имеем:

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}} dx = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C.$$

60. Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Решение. Берем подстановку

$$\frac{1}{x} = y \text{ или } x = \frac{1}{y}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} dx &= -\frac{dy}{y^2}, \quad \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{y^2}-1} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{|y|} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{y} \sqrt{1-y^2} & \text{при } y > 0, \\ -\frac{1}{y} \sqrt{1-y^2} & \text{при } y < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} &= \int \frac{-\frac{1}{y^2} dy}{\left(\pm \frac{1}{y} \sqrt{1-y^2}\right) \left(\frac{1}{y}\right)} = \mp \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \\ &= \mp \arcsin y + C = \mp \arcsin \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

(где знак минус следует брать для $x > 0$).

При решении задач 52—60 мы обычно брали подстановку вида $\varphi(x) = t$, т. е. мы какую-то функцию от x принимали за новую переменную. Иногда же бывают удобны подстановки вида $x = \psi(t)$. Рассмотрим несколько задач, где удобно брать подстановки в такой форме. В задачах 61—63 мы применяем подстановки, называемые *тригонометрическими подстановками*.

61. Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$$

Решение. Здесь удобна подстановка

$$x = \operatorname{tg} t,$$

так как она освобождает подынтегральную функцию от

радикала. В самом деле, имеем:

$$dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt,$$

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} = \sqrt{\sec^2 t} = \sec t = \frac{1}{\cos t},$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{\cos t dt}{\operatorname{tg}^2 t \cdot \cos^2 t} = \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = \int \frac{d \sin t}{\sin^2 t} = \\ &= -\frac{1}{\sin t} + C = -\operatorname{cosec} t + C. \end{aligned}$$

Чтобы вернуться к первоначальному переменному x , нам остается выразить $\operatorname{cosec} t$ через $\operatorname{tg} t$. Имеем:

$$\begin{aligned} -\operatorname{cosec} t + C &= -\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 t} + C = \\ &= -\sqrt{1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2 t}} + C = -\frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1}}{\operatorname{tg} t} + C = \\ &= -\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} + C. \end{aligned}$$

Попробуйте самостоятельно взять этот интеграл с помощью подстановки $x = \operatorname{ctg} t$.

62. Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Решение. Здесь удобна подстановка

$$x = \sec t = \frac{1}{\cos t}, \quad \text{откуда } \cos t = \frac{1}{x}.$$

Далее имеем:

$$dx = d\left(\frac{1}{\cos t}\right) = \left(-\frac{1}{\cos^2 t}\right) \cdot (-\sin t) dt = \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt,$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \operatorname{tg} t,$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} = \int \frac{\cos^2 t \cdot \sin t}{\operatorname{tg} t \cdot \cos^2 t} dt = \int \cos t dt = \sin t + C =$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2 t} + C = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + C = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C.$$

Попробуйте взять этот интеграл самостоятельно с помощью подстановки $x = \operatorname{cosec} t = \frac{1}{\sin t}$.

63. Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}}.$$

Решение. Здесь удобна подстановка
 $x = \sin t$.

Имеем:

$$\begin{aligned} dx &= \cos t \, dt, \quad \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t, \\ \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{\cos t \, dt}{\sin^2 t \cos t} = \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\operatorname{ctg} t + C = \\ &= -\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C. \end{aligned}$$

Попробуйте взять этот интеграл самостоятельно с помощью подстановки $x = \cos t$.

Таким образом, если подынтегральная функция содержит радикал вида $\sqrt{a^2-x^2}$, то удобны подстановки либо $x = a \sin t$, либо $x = a \cos t$. При радикалах вида $\sqrt{x^2+a^2}$ удобны подстановки либо $x = a \operatorname{tg} t$, либо $x = a \operatorname{ctg} t$. При радикалах вида $\sqrt{x^2-a^2}$ удобны подстановки либо $x = a \sec t$, либо $x = a \operatorname{cosec} t$.

В задачах 64—90 найти интегралы, применяя подходящую подстановку.

64. $\int \cos \left(\frac{2x-3}{5} \right) dx.$

65. $\int \cos (x^2-1) x \, dx.$

66. $\int \frac{3x-2}{\sqrt{4-x^2}} dx.$

67. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+4}} dx.$

68. $\int e^{x^3} x^2 \, dx.$

69. $\int e^{-\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^2}.$

70. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}.$

71. $\int \frac{e^{-x} dx}{1-e^{-2x}}.$

У к а з а н и е. В задаче 71 воспользуйтесь подстановкой $e^{-x} = t$.

72. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2 dx}{1+x^2}.$

73. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

74. $\int e^{2 \cos x} \sin x \, dx.$

75. $\int \frac{e^{-x} dx}{2+e^{-x}}.$

76. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

77. $\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-4}} dx.$

$$78. \int \frac{5x - 3}{4x^2 + 3} dx.$$

$$80. \int \frac{e^t dt}{\sqrt{1 - e^{2t}}}.$$

$$82. \int \frac{x^2 dx}{1 + x^6}.$$

$$84. \int \frac{dx}{(\arccos x) \sqrt{1 - x^2}}.$$

$$86. \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 - \cos x}}.$$

$$88. \int x^2 \cos x^3 dx.$$

$$90. \int \frac{x + \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$79. \int \frac{3x + 2}{x^2 - 6} dx.$$

$$81. \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx.$$

$$83. \int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

$$85. \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 - \sin^2 x}}.$$

$$87. \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} - 4}}.$$

$$89. \int \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx.$$

В задачах 91—96 найти интегралы с помощью одной из тригонометрических подстановок.

$$91. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$92. \int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2} dx.$$

$$93. \int \frac{dx}{(1 - x^2) \sqrt{1 - x^2}}.$$

$$94. \int \frac{dx}{(x^2 + 1) \sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$95. \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$96. \int \frac{x dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

§ 3. Способ интегрирования по частям

Предварительно изучите по учебнику Г. М. Фихтенгольца главу X, п° 162, 163.

Интегрированием по частям называется сведение заданного интеграла $\int u dv$ к интегралу $\int v du$ с помощью формулы

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (1)$$

Применяя способ интегрирования по частям, мы должны предварительно представить подынтегральное выражение в виде произведения одной функции на дифференциал другой функции. Дадим два практических совета.

Если подынтегральное выражение представляет собой произведение либо тригонометрической функции на ал-

гебраическую, либо показательной на алгебраическую, то за u следует принимать алгебраическую функцию.

Если в подынтегральное выражение входит множителем либо одна из обратных тригонометрических функций $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ и др., либо функция $\ln x$, то за u следует выбирать одну из указанных функций.

97. Найти интеграл:

$$\int x e^{-2x} dx.$$

Решение. Сначала вводим множитель e^{-2x} под знак дифференциала

$$\int x e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int \underbrace{x}_u \underbrace{de^{-2x}}_{dv}.$$

Теперь подготовим все необходимое, расположив запись, как показано:

$$u = -\frac{1}{2} x, \text{ откуда } \begin{cases} du = -\frac{1}{2} dx, \\ dv = de^{-2x}, \end{cases} \quad v = e^{-2x}.$$

Таким образом, по формуле (1) имеем:

$$\begin{aligned} \int x e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = \\ &= -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C. \end{aligned}$$

98. Найти интеграл:

$$\int x \sin 4x dx.$$

Решение. Имеем:

$$\int x \sin 4x dx = -\frac{1}{4} \int x d \cos 4x,$$

$$u = -\frac{1}{4} x, \text{ откуда } \begin{cases} du = -\frac{1}{4} dx, \\ dv = d \cos 4x, \end{cases} \quad v = \cos 4x,$$

$$\begin{aligned} \int x \sin 4x dx &= -\frac{1}{4} x \cos 4x + \frac{1}{4} \int \cos 4x dx = \\ &= -\frac{1}{4} x \cos 4x + \frac{1}{16} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

99. Найти интеграл:

$$\int x^2 \sin 2x dx.$$

Решение. Имеем:

$$\int x^2 \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \int x^2 d \cos 2x,$$

$$u = -\frac{1}{2}x^2, \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} du = -x dx, \\ dv = d \cos 2x, \end{cases}$$

$$\int x^2 \sin 2x dx = -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \int x \cos 2x dx.$$

Полученный интеграл еще раз интегрируем по частям:

$$\int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int x d \sin 2x,$$

$$u = \frac{1}{2}x, \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} du = \frac{1}{2} dx, \\ dv = d \sin 2x, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int x \cos 2x dx &= \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \\ &= \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C. \end{aligned}$$

Итак, окончательно имеем:

$$\int x^2 \sin 2x dx = -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

100. Найти интеграл:

$$\int x^3 \sin(x^2) dx.$$

Решение. Сначала подводим множитель x под знак дифференциала, затем применяем подстановку $x^2 = t$ и только после этого интегрируем по частям:

$$\begin{aligned} \int x^3 \sin(x^2) dx &= \frac{1}{2} \int x^2 \sin(x^2) dx^2 = \frac{1}{2} \int t \sin t dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int t d \cos t = -\frac{1}{2} t \cos t + \frac{1}{2} \int \cos t dt = -\frac{1}{2} t \cos t + \\ &+ \frac{1}{2} \sin t + C = -\frac{1}{2} x^2 \cos(x^2) + \frac{1}{2} \sin(x^2) + C. \end{aligned}$$

101. Найти интеграл:

$$\int \arccos x \, dx.$$

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} u &= \arccos x, \\ dv &= dx, \end{aligned} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ v = x, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \arccos x \, dx &= x \arccos x + \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Интеграл $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$ берется подстановкой $\sqrt{1-x^2} = t$ (см. решение задачи 59).

102. Найти интеграл:

$$\int x^3 \ln x \, dx.$$

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} \int x^3 \ln x \, dx &= \frac{1}{4} \int \ln x \, dx^4, \\ u &= \ln x, \\ dv &= \frac{1}{4} dx^4, \end{aligned} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} du = \frac{dx}{x}, \\ v = \frac{1}{4} x^4, \end{cases}$$

$$\int x^3 \ln x \, dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int \frac{x^4 \, dx}{x} = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C.$$

103. Найти интеграл:

$$\int \ln x \, dx.$$

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} u &= \ln x, \\ dv &= dx, \end{aligned} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} du = \frac{dx}{x}, \\ v = x, \end{cases}$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

104. Найти интеграл:

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx.$$

Решение. Имеем:

$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \int \operatorname{arctg} x d \frac{x^2}{2},$$

$$u = \operatorname{arctg} x, \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} du = \frac{dx}{1+x^2}, \\ dv = d \frac{x^2}{2}, \end{cases}$$

$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx.$$

Возьмем интеграл в правой части:

$$-\frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

Окончательно получим:

$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + C.$$

105. Найти интеграл:

$$\int x \ln^2 x dx.$$

Решение. Имеем:

$$\int x \ln^2 x dx = \int \ln^2 x d \frac{x^2}{2},$$

$$u = \ln^2 x, \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} du = 2 \ln x \cdot \frac{dx}{x}, \\ dv = d \frac{x^2}{2}, \end{cases}$$

$$\int x \ln^2 x dx = \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \int x \ln x dx.$$

Интеграл в правой части берем опять по частям:

$$\int x \ln x dx = \int \ln x d \frac{x^2}{2},$$

$$u = \ln x, \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} du = \frac{dx}{x}, \\ dv = d \frac{x^2}{2}, \end{cases}$$

$$\int x \ln x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 - C.$$

Окончательно получим:

$$\int x \ln^2 x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C.$$

Необходимо обратить особое внимание на решение задач 106—108.

106. Найти интеграл:

$$\int e^{-2x} \cos 3x \, dx$$

(см. решение примера 4 в п° 163 учебника).

Решение. Проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} u &= e^{-2x}, \\ dv &= \cos 3x \, dx, \end{aligned} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} du = -2e^{-2x} \, dx, \\ v = \frac{1}{3} \sin 3x, \end{cases}$$

$$\int e^{-2x} \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} e^{-2x} \sin 3x + \frac{2}{3} \int e^{-2x} \sin 3x \, dx. \quad (2)$$

Мы получили интеграл несколько не проще заданного. Но это не должно нас смущать. Проинтегрируем его еще раз по частям:

$$\begin{aligned} u &= e^{-2x}, \\ dv &= \sin 3x \, dx, \end{aligned} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} du = -2e^{-2x} \, dx, \\ v = -\frac{1}{3} \cos 3x, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3} \int e^{-2x} \sin 3x \, dx = \\ &= -\frac{2}{9} e^{-2x} \cos 3x - \frac{4}{9} \int e^{-2x} \cos 3x \, dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставив полученный результат в равенство (2), найдем:

$$\begin{aligned} &\int e^{-2x} \cos 3x \, dx = \\ &= \frac{1}{3} e^{-2x} \sin 3x - \frac{2}{9} e^{-2x} \cos 3x - \frac{4}{9} \int e^{-2x} \cos 3x \, dx. \end{aligned}$$

Теперь осталось перенести интеграл из правой части в левую, сделать затем в левой части равенства приведение подобных членов и разделить обе части равенства на полученный коэффициент:

$$\begin{aligned} &\int e^{-2x} \cos 3x \, dx + \frac{4}{9} \int e^{-2x} \cos 3x \, dx = \\ &= \frac{1}{9} e^{-2x} (3 \sin 3x - 2 \cos 3x) + C_1, \end{aligned}$$

или окончательно:

$$\int e^{-2x} \cos 3x \, dx = \frac{1}{13} e^{-2x} (3 \sin 3x - 2 \cos 3x) + C.$$

З а м е ч а н и е. При решении задачи 106 мы могли бы с таким же успехом положить $u = \cos 3x$, $dv = e^{-2x} dx$. Но в этом случае при вторичном интегрировании по частям следовало бы обязательно в качестве функции u выбрать тригонометрическую функцию.

Решите самостоятельно задачу 106 указанным вторым способом.

107. Найти интеграл:

$$\int \cos (\ln x) \, dx .$$

Р е ш е н и е. Поступаем аналогично решению задачи 106:

$$\begin{aligned} u &= \cos (\ln x), \\ dv &= dx, \end{aligned} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} du = -\sin (\ln x) \frac{dx}{x}, \\ v = x, \end{cases}$$
$$\int \cos (\ln x) \, dx = x \cos (\ln x) + \int \sin (\ln x) \, dx . \quad (4)$$

Интегрируем еще раз по частям:

$$\begin{aligned} u &= \sin (\ln x), \\ dv &= dx, \end{aligned} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} du = \cos (\ln x) \frac{dx}{x}, \\ v = x, \end{cases}$$
$$\int \sin (\ln x) \, dx = x \sin (\ln x) - \int \cos (\ln x) \, dx . \quad (5)$$

Объединяя равенства (4) и (5) и поступая аналогично решению задачи 106, окончательно получим:

$$\int \cos (\ln x) \, dx = \frac{1}{2} x [\sin (\ln x) + \cos (\ln x)] + C .$$

108. Найти интеграл:

$$\int \sqrt{1+x^2} \, dx$$

способом интегрирования по частям.

Р е ш е н и е. Первый способ. Интегрируем сразу по частям:

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{1+x^2}, \\ dv &= dx, \end{aligned} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} du = \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}, \\ v = x, \end{cases}$$

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = x \sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx. \quad (6)$$

Преобразуем следующим образом интеграл в правой части (6):

$$\begin{aligned} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx &= - \int \frac{x^2 + 1 - 1}{\sqrt{1+x^2}} dx = - \int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{1+x^2}} dx + \\ &+ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = - \int \sqrt{1+x^2} dx + \ln(x + \sqrt{1+x^2}). \end{aligned} \quad (7)$$

Съединяя (6) и (7) и поступая аналогично решениям предыдущих двух задач, окончательно получим:

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [x \sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})] + C.$$

Второй способ. Освободимся от иррациональности в числителе, помножив и разделив подынтегральную функцию на $\sqrt{1+x^2}$, а затем разобьем на 2 интеграла:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2} dx &= \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = \\ &= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \int x \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Полученный интеграл в правой части (8) возьмем по частям (поэтому мы и записали его в таком виде); именно, положим:

$$\begin{aligned} u &= x, \\ dv &= \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}, \end{aligned} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} du = dx, \\ v = \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} *) = \sqrt{1+x^2}, \end{cases}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}} = x \sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx. \quad (9)$$

После двукратного интегрирования по частям мы снова вернулись к исходному интегралу. Объединяя равенства (8) и (9), получим:

*) Полученный интеграл легко берется подстановкой $\sqrt{1+x^2}=t$, сравни с решением задачи 101.

$$\int \sqrt{1+x^2} dx =$$

$$= x \sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \sqrt{1+x^2} dx,$$

откуда окончательно получаем:

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [x \sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})] + C.$$

Задачи 109—126 решить способом интегрирования по частям.

$$109. \int x e^x dx. \quad 110. \int x 2^x dx. \quad 111. \int x^2 e^{2x} dx.$$

$$112. \int x \cos 3x dx. \quad 113. \int (x+2)^2 \sin 3x dx.$$

$$114. \int e^{x^2} x^3 dx. \quad 115. \int \arcsin x dx.$$

$$116. \int \operatorname{arctg} x dx. \quad 117. \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$118. \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx. \quad 119. \int x^2 \ln x dx.$$

$$120. \int e^x \sin x dx. \quad 121. \int e^x \cos x dx.$$

$$122. \int \sin(\ln x) dx. \quad 123. \int \ln(x^2+1) dx.$$

$$124. \int \sqrt{1-x^2} dx. \quad 125. \int \sqrt{x^2-a^2} dx.$$

$$126. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

У к а з а н и е. В задаче 126 положите $dv = \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ и затем после интегрирования по частям преобразуйте интеграл

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \quad \text{к виду} \quad \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$\S 4. \text{ Интегралы вида } \int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx$$

В интегралы указанного вида входит выражение

$$ax^2+bx+c, \quad (1)$$

которое называют *квадратным трехчленом*. Выражение

$d = b^2 - 4ac$ называют *дискриминантом* квадратного трехчлена.

Напомним, что если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена (1), то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Из элементарной алгебры известно также, что квадратный трехчлен (1)

1) имеет вещественные различные корни, если $b^2 - 4ac > 0$,

2) имеет вещественные равные корни, если $b^2 - 4ac = 0$,

3) » комплексные сопряженные корни, если $b^2 - 4ac < 0$.

Всякий квадратный трехчлен, у которого коэффициент при x в первой степени равен нулю, называется *каноническим*. Он имеет вид $ax^2 + c$.

Покажем на примерах, как квадратный трехчлен приводится к каноническому виду.

Первый способ. Пусть дан трехчлен $x^2 + x + 1$. Дополняем его до полного квадрата. Чтобы избежать дробных слагаемых, поступаем так:

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= \frac{1}{4}(4x^2 + 4x + 4) = \frac{1}{4}(4x^2 + 4x + 1 + 3) = \\ &= \frac{1}{4}[(2x + 1)^2 + 3] = \frac{1}{4}(z^2 + 3), \text{ где } z = 2x + 1. \end{aligned}$$

Такой способ приведения к каноническому виду называется *дополнением до полного квадрата*. Заметив, что значение z равно производной от квадратного трехчлена по x , мы теперь можем предложить другой способ приведения к каноническому виду.

Второй способ. Привести к каноническому виду трехчлен $5x^2 - x + 2$. Производную от трехчлена принимаем за новую переменную:

$$z = 10x - 1,$$

откуда находим

$$x = \frac{z + 1}{10}$$

и подставляем это значение x в данный трехчлен:

$$5x^2 - x + 2 = 5 \frac{(z+1)^2}{100} - \frac{z+1}{10} + 2 = \frac{1}{20} (z^2 + 2z + 1 - 2z - 2 + 40) = \frac{1}{20} (z^2 + 39) = \frac{1}{20} [(10x - 1)^2 + 39].$$

Приведем этот же трехчлен к каноническому виду 1-м способом:

$$5x^2 - x + 2 = \frac{1}{20} (100x^2 - 20x + 40) = \frac{1}{20} [(10x - 1)^2 + 39] = \frac{1}{20} (z^2 + 39), \text{ где } z = 10x - 1.$$

Рассмотрим второй способ в общем виде. За новую переменную z принимаем производную от квадратного трехчлена (1):

$$z = 2ax + b.$$

Из полученного равенства находим x как функцию от z :

$$x = \frac{z - b}{2a}$$

и подставляем это значение x в трехчлен (1). Мы получим:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \frac{(z - b)^2}{4a^2} + b \frac{z - b}{2a} + c = \\ &= \frac{1}{4a} [(z - b)^2 + 2b(z - b) + 4ac] = \\ &= \frac{1}{4a} (z^2 - 2bz + b^2 + 2bz - 2b^2 + 4ac) = \frac{1}{4a} (z^2 - d), \end{aligned}$$

где $d = b^2 - 4ac$ есть дискриминант квадратного трехчлена.

Двумя способами привести к каноническому виду трехчлен

$$5 - 7x - 3x^2.$$

1) Имеем:

$$\begin{aligned} 5 - 7x - 3x^2 &= -\frac{1}{12} (36x^2 + 84x - 60) = -\frac{1}{12} [(6x + 7)^2 - \\ - 49 - 60] &= -\frac{1}{12} (z^2 - 109) = \frac{1}{12} (109 - z^2), \text{ где } z = 6x + 7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Применяем подстановку } z &= 6x + 7, \quad \text{откуда } x = \\ &= \frac{z - 7}{6}. \end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} 5 - 7x - 3x^2 &= 5 - 7 \frac{z-7}{6} - 3 \frac{(z-7)^2}{36} = \\ &= \frac{1}{12} [60 - 14z + 98 - z^2 + 14z - 49] = \frac{1}{12} (109 - z^2) = \\ &= \frac{1}{12} [109 - (6x + 7)^2]. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь интегралы вида $\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx$.

Начнем с более простых задач.

127. Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1}.$$

Решение. Применяя подстановку $z = 2x + 1$, откуда $dz = 2 dx$ и, следовательно, $dx = \frac{1}{2} dz$, приведем квадратный трехчлен к каноническому виду (см. стр. 32):

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} &= \int \frac{\frac{1}{2} dz}{\frac{1}{4}(z^2 + 3)} = 2 \int \frac{dz}{z^2 + 3} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

128. Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{6x^2 + x - 2}.$$

Решение. Применяем подстановку

$$z = 12x + 1, \quad x = \frac{z-1}{12}, \quad dx = \frac{1}{12} dz,$$

$$6x^2 + x - 2 = \frac{1}{24} [(z-1)^2 + 2(z-1) - 48] = \frac{1}{24} (z^2 - 49).$$

Имеем:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{6x^2 + x - 2} &= \int \frac{\frac{1}{12} dz}{\frac{1}{24} (z^2 - 49)} = 2 \int \frac{dz}{z^2 - 49} = \frac{1}{7} \ln \left| \frac{z-7}{z+7} \right| + \\ &+ C_1 = \frac{1}{7} \ln \left| \frac{12x-6}{12x+8} \right| + C_1 = \frac{1}{7} \ln \left| \frac{3}{2} \frac{2x-1}{3x+2} \right| + C_1 = \\ &= \frac{1}{7} \ln \frac{3}{2} + \frac{1}{7} \ln \left| \frac{2x-1}{3x+2} \right| + C_1 = \frac{1}{7} \ln \left| \frac{2x-1}{3x+2} \right| + C,\end{aligned}$$

где $C = \frac{1}{7} \ln \frac{3}{2} + C_1$.

129. Найти интеграл:

$$\int \frac{10x - 5}{x^2 - x + 1} dx.$$

Решение. Здесь числитель отличается от производной знаменателя, равной $2x - 1$, постоянным множителем 5, поэтому

$$\int \frac{10x - 5}{x^2 - x + 1} dx = 5 \int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} dx = 5 \ln (x^2 - x + 1) + C$$

(см. решения задач 9 и 10).

130. Найти интеграл:

$$\int \frac{3x - 1}{x^2 - x + 1} dx.$$

Решение. Здесь числитель не равен производной знаменателя и не отличается от нее постоянным множителем. В таких случаях интеграл можно взять двумя способами.

Первый способ. Аналогично решениям задач 127, 128, применяем подстановку

$$z = 2x - 1,$$

откуда

$$x = \frac{z+1}{2}, \quad dx = \frac{1}{2} dz,$$

$$\begin{aligned}x^2 - x + 1 &= \frac{1}{4} (4x^2 - 4x + 1 + 3) = \frac{1}{4} [(2x-1)^2 + 3] = \\ &= \frac{1}{4} (z^2 + 3),\end{aligned}$$

$$3x - 1 = 3 \frac{z + 1}{2} - 1 = \frac{3}{2} z + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (3z + 1),$$

$$\begin{aligned} \int \frac{(3x - 1) dx}{x^2 - x + 1} &= \int \frac{\frac{1}{2} (3z + 1) \cdot \frac{1}{2} dz}{\frac{1}{4} (z^2 + 3)} = 3 \int \frac{z dz}{z^2 + 3} + \int \frac{dz}{z^2 + 3} = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2z dz}{z^2 + 3} + \int \frac{dz}{z^2 + 3} = \frac{3}{2} \ln(z^2 + 3) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{3}} + \\ &+ C_1 = \frac{3}{2} \ln[(2x - 1)^2 + 3] + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C_1 = \\ &= \frac{3}{2} \ln[4(x^2 - x + 1)] + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C_1 = \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C, \end{aligned}$$

где

$$C = \frac{3}{2} \ln 4 + C_1.$$

Второй способ. Выделим в числителе часть, кратную производной знаменателя:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x - 1}{x^2 - x + 1} dx &= \int \frac{\frac{3}{2} (2x - 1) + \frac{1}{2}}{x^2 - x + 1} dx = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x + 1}. \end{aligned}$$

Мы получили более простой интеграл, который возьмем подстановкой $z = 2x - 1$. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \int \frac{dz}{z^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{3}} + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Итак, окончательно

$$\int \frac{3x - 1}{x^2 - x + 1} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Второй способ решения особенно выгодно применять в случае, когда квадратный трехчлен имеет комплексные корни.

131. Найти интеграл:

$$\int \frac{5x + 8}{6x^2 + x - 2} dx.$$

Решение. В данном случае корни квадратного трехчлена вещественны и равны соответственно $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$, следовательно,

$$6x^2 + x - 2 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = (2x - 1)(3x + 2).$$

Применим к решению этой задачи способ неопределенных коэффициентов (см. учебник, п° 166). Имеем тождественное равенство:

$$\frac{5x + 8}{6x^2 + x - 2} \equiv \frac{A}{2x - 1} + \frac{B}{3x + 2}.$$

Приводя к общему знаменателю, приравниваем числители:

$$5x + 8 \equiv A(3x + 2) + B(2x - 1) = x(3A + 2B) + 2A - B.$$

Теперь воспользуемся тем, что в обеих частях тождества коэффициенты при одинаковых степенях x должны быть равны:

$$\left. \begin{array}{l} x^1 \mid 3A + 2B = 5, \\ x^0 \mid 2A - B = 8. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Решая эту систему, найдем} \\ A = 3, B = -2. \end{array}$$

Следовательно,

$$\frac{5x + 8}{6x^2 + x - 2} = \frac{3}{2x - 1} - \frac{2}{3x + 2}$$

и

$$\begin{aligned} \int \frac{5x + 8}{6x^2 + x - 2} dx &= 3 \int \frac{dx}{2x - 1} - 2 \int \frac{dx}{3x + 2} = \\ &= \frac{3}{2} \ln |2x - 1| - \frac{2}{3} \ln |3x + 2| + C. \end{aligned}$$

132. Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{2ax - x^2}.$$

Решение. Знаменатель легко разложить на вещественные множители; применяем способ неопределенных коэффициентов:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2ax - x^2} &\equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{2a - x}; \\ 1 &\equiv A(2a - x) + Bx. \end{aligned} \quad (2)$$

Неопределенные коэффициенты A и B можно найти и с помощью такого рассуждения. Тождество (2) справедливо при любом значении x ; подставим поэтому в тождество такие значения x , при которых одно из выражений при A или B обращалось бы в нуль. Такими значениями x будут $x = 0$, $x = 2a$. Имеем:

$$\begin{array}{l|l} x = 0 & 1 = 2aA, \quad A = \frac{1}{2a}, \\ x = 2a & 1 = 2aB, \quad B = \frac{1}{2a}. \end{array}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2ax - x^2} &= \int \frac{dx}{2ax} + \int \frac{dx}{2a(2a-x)} = \\ &= \frac{1}{2a} \ln |x| - \frac{1}{2a} \ln |2a-x| + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x}{2a-x} \right| + C. \end{aligned}$$

133. Найти интеграл:

$$\int \frac{(x+1) dx}{4x^2 - 12x + 9}.$$

Решение. Здесь квадратный трехчлен имеет два равных вещественных корня, так как $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$. Выделяем поэтому в числителе часть, кратную $2x - 3$, разбиваем на два интеграла, которые легко берутся подстановкой $2x - 3 = t$:

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+1) dx}{4x^2 - 12x + 9} &= \frac{1}{2} \int \frac{2x - 3 + 5}{(2x - 3)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{2x - 3} + \\ &+ \frac{5}{2} \int \frac{dx}{(2x - 3)^2} = \frac{1}{4} \ln |2x - 3| - \frac{5}{4(2x - 3)} + C. \end{aligned}$$

В задачах 134 — 144 либо приведите квадратный трехчлен к каноническому виду (в случае комплексных корней), либо воспользуйтесь способом неопределенных коэффициентов (в случае вещественных корней).

$$134. \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}. \quad 135. \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 7}. \quad 136. \int \frac{dx}{x^2 + 5x + 6}.$$

$$137. \int \frac{dx}{2x^2 + 5x}. \quad 138. \int \frac{(2x+5) dx}{4x^2 - 4x - 2}.$$

$$139. \int \frac{(x-2) dx}{3x^2 - 12x + 7}. \quad 140. \int \frac{x^4 - 7x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2} dx.$$

У к а з а н и е. В задаче 140 предварительно исключите целую часть.

$$141. \int \frac{(3x+2) dx}{4x^2-4x+1} \quad 142. \int \frac{(x+1) dx}{1-2x+x^2} \\ 143. \int \frac{(2x+4) dx}{x^2-2x+5} \quad 144. \int \frac{(2x+3) dx}{2x^2+x+1}.$$

§ 5 Интегралы вида $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$

Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (1)$$

одним из способов приведения квадратного трехчлена к каноническому виду сводятся либо к формуле 10 из таблицы 1 (при $a < 0$), либо к формуле 11 (при $a > 0$).

В интегралах более общего вида

$$\int \frac{(Mx+N) dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (2)$$

мы выделяем сначала в числителе часть, кратную производной трехчлена, и в результате получаем интеграл вида (1).

145. Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8-6x-9x^2}}.$$

Решение. Приводим квадратный трехчлен к каноническому виду способом добавления до полного квадрата:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{8-6x-9x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{9-(1+6x+9x^2)}} = \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{d(3x+1)}{\sqrt{9-(3x+1)^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x+1}{3} + C \end{aligned}$$

(см. формулу 10 из табл. 1).

146. Найти интеграл:

$$\int \frac{(2x+1) dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}.$$

Решение. Числитель подынтегральной функции отличается от производной трехчлена постоянным множителем 4. Поэтому интеграл берется сразу подстановкой

$$\sqrt{4x^2+4x-3} = t, \text{ откуда } \frac{(8x+4) dx}{2\sqrt{4x^2+4x-3}} = dt.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{(2x+1) dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}} &= \frac{1}{2} \int \frac{(8x+4) dx}{2\sqrt{4x^2+4x-3}} = \\ &= \frac{1}{2} \int dt = \frac{1}{2} t + C = \frac{1}{2} \sqrt{4x^2+4x-3} + C. \end{aligned}$$

147. Найти интеграл:

$$\int \frac{(x+3) dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}.$$

Решение. Выделим в числителе часть, кратную производной от квадратного трехчлена. Получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+3) dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}} &= \int \frac{\frac{1}{8}(8x+4) + \frac{5}{2}}{\sqrt{4x^2+4x-3}} dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{(8x+4) dx}{2\sqrt{4x^2+4x-3}} + \frac{5}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2-4}} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{4x^2+4x-3} + \frac{5}{4} \ln|2x+1+\sqrt{(2x+1)^2-4}| + \\ &\quad + C = \frac{1}{4} \sqrt{4x^2+4x-3} + \\ &\quad + \frac{5}{4} \ln|2x+1+\sqrt{4x^2+4x-3}| + C. \end{aligned}$$

Первый интеграл мы взяли, как в решении задачи 146; второй интеграл подстановкой $2x+1=t$ сразу приводится к формуле 11 из таблицы 1.

148. Найти интеграл:

$$\int \frac{(x+1) dx}{\sqrt{x(2-x)}}.$$

Решение. Сначала выделяем в числителе часть, кратную производной квадратного трехчлена. Так как $[x(2-x)]' = (2x-x^2)' = 2-2x$,

то получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+1) dx}{\sqrt{x(2-x)}} &= \int \frac{-\frac{1}{2}(2-2x) + 2}{\sqrt{2x-x^2}} dx = - \int \frac{(2-2x) dx}{2\sqrt{2x-x^2}} + \\ &+ 2 \int \frac{dx}{\sqrt{1-1+2x-x^2}} = - \sqrt{2x-x^2} + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \\ &= - \sqrt{2x-x^2} + 2 \arcsin(x-1) + C. \end{aligned}$$

Интегралы вида

$$\int \frac{(Mx + N) dx}{(px + q)\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (3)$$

приводятся к интегралам вида (2) подстановкой

$$px + q = \frac{1}{t}.$$

Как это делается, показано в решении задачи 60 для случая, когда $p = 1$, $q = 0$.

В задачах 149—156 возьмите интегралы путем приведения квадратного трехчлена к каноническому виду и там, где это необходимо, предварительно выделите в числителе часть, кратную производной от квадратного трехчлена.

$$149. \int \frac{dx}{\sqrt{2 + 4x - 4x^2}}.$$

$$150. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 4x + 2}}.$$

$$151. \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 6x - 8}}.$$

$$152. \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x - x^2}}.$$

$$153. \int \frac{(3x + 1) dx}{\sqrt{9x^2 + 6x - 8}}.$$

$$154. \int \frac{(x + 3) dx}{\sqrt{3 + 4x - 4x^2}}.$$

$$155. \int \frac{(2x + 1) dx}{\sqrt{4x - 3 - x^2}}.$$

$$156. \int \frac{(x + 3) dx}{\sqrt{x(x - 2)}}.$$

В задачах 157, 158 воспользуйтесь сначала подстановкой $px + q = \frac{1}{t}$.

$$157. \int \frac{dx}{(2x - 3)\sqrt{x^2 - 3x + 2}}. \quad 158. \int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{x^2 - 3x + 2}}.$$

Дополнительные задачи к главе I

$$159. \int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}.$$

$$160. \int \frac{e^x dx}{(e^x + 1)^2}.$$

$$161. \int \frac{dx}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

$$162. \int \sqrt{e^x + 1} dx.$$

$$163. \int \frac{1 + \sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx.$$

$$164. \int \frac{dx}{(\operatorname{tg} x + 1) \sin^2 x}.$$

$$165. \int (2x + 2) \operatorname{arctg} x dx.$$

$$166. \int \frac{\ln x dx}{(1 + x)^2}.$$

$$167. \int (x^2 - x + 1) e^x dx.$$

$$169. \int 4x \arcsin x dx.$$

$$171. \int \frac{(4x - 7) dx}{x^2 + 6x + 9}.$$

$$173. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

$$175. \int \frac{x dx}{\sqrt{ax - x^2}}.$$

$$177. \int \frac{dx}{(x + 1) \sqrt{1 - x^2}}.$$

$$168. \int (x^2 - 1) \cos x dx.$$

$$170. \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx.$$

$$172. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

$$174. \int \frac{x dx}{\sqrt{1 + x - x^2}}.$$

$$176. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

$$178. \int \frac{\sqrt{x}}{x - 1} dx.$$

ГЛАВА II

ОСНОВНЫЕ КЛАССЫ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Интегрирование рациональных функций

Предварительно изучите по учебнику Г. М. Фихтенгольца главу X, п° 164—167. Перед тем как перейти к решению задач на случай 4, еще раз внимательно разберите решение примера 5 в п° 163 учебника.

При решении задач настоящего параграфа в тех случаях, когда степень многочлена в числителе больше или равна степени многочлена в знаменателе, не забывайте предварительно исключить целую часть.

Случай 1. В разложение знаменателя рациональной функции входят только множители первой степени и ни один из них не повторяется.

179. Найти интеграл:

$$\int \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} dx.$$

Решение. Так как

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 4 &= (x^2 - 1)(x^2 - 4) = \\ &= (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2), \end{aligned}$$

то подынтегральную функцию мы разложим на такие простейшие дроби:

$$\frac{x^2 - x + 2}{(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2} + \frac{D}{x - 2}, \quad (1)$$

где постоянные A, B, C, D найдем следующим образом с помощью метода неопределенных коэффициентов (как мы поступали выше при решении задачи 132).

Приводим равенство (1) к общему знаменателю и последний отбрасываем:

$$x^2 - x + 2 = A(x-1)(x+2)(x-2) + \\ + B(x+1)(x+2)(x-2) + C(x+1)(x-1)(x-2) + \\ + D(x+1)(x-1)(x+2). \quad (2)$$

Равенство (2) справедливо при любых значениях x . Поэтому выбираем теперь четыре*) таких значения x , каждое из которых обратило бы в нуль какой-нибудь из сомножителей в правой части (2). В нашей задаче такими значениями являются: $x = -1$, $x = 1$, $x = -2$, $x = 2$. Подставив поочередно эти значения в равенство (2), получим:

$$\begin{array}{l|l} x = -1 & 4 = A(-2)(+1)(-3) + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D \cdot 0, \\ & \text{откуда } A = \frac{2}{3}, \\ x = 1 & 2 = A \cdot 0 + B \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-1) + C \cdot 0 + D \cdot 0, \\ & \text{откуда } B = -\frac{1}{3}, \\ x = -2 & 8 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C(-1)(-3)(-4) + D \cdot 0, \\ & \text{откуда } C = -\frac{2}{3}, \\ x = 2 & 4 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4, \\ & \text{откуда } D = \frac{1}{3}. \end{array}$$

Таким образом, мы получили следующее разложение рациональной дроби на простейшие:

$$\frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} = \frac{2}{3(x+1)} - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x-2)}.$$

Интегрируя, находим:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - x + 2}{x^4 - 5x^2 + 4} dx &= \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x+2} + \\ &+ \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-2} = \frac{1}{3} [2 \ln |x+1| - \ln |x-1| - \\ &- 2 \ln |x+2| + \ln |x-2|] + C = \\ &= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{(x+1)^2 (x-2)}{(x-1)(x+2)^2} \right| + C. \end{aligned}$$

* Четыре значения x потому, что нам надо найти четыре неопределенных коэффициента, число которых всегда равно степени знаменателя.

Разумеется, мы могли бы искать неопределенные коэффициенты A , B , C , D и так, как мы это делали при решении задачи 131. Однако в случае 1 это немного усложняет отыскание указанных коэффициентов.

180. Найти интеграл:

$$\int \frac{x^2 + 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx.$$

Решение. Так как $x^3 + x^2 - 2x = x(x-1)(x+2)$, то аналогично решению предыдущей задачи пишем следующее разложение подынтегральной функции:

$$\frac{x^2 + 2}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}. \quad (3)$$

Далее имеем:

$$x^2 + 2 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1). \quad (4)$$

З а м е ч а н и е. Обращаем внимание читателя на то, что ни в предыдущей задаче, ни в настоящей мы намеренно не раскрываем скобок в правой части равенства (4), так как это привело бы не к упрощению, а, наоборот, к некоторому усложнению подсчета коэффициентов. В задачах, относящихся к случаю 1, так всегда рекомендуем поступать.

Находим теперь значения равенства (4) при $x = 0$, $x = 1$, $x = -2$. Имеем:

$$\begin{array}{l|l} x = 0 & 2 = -2A, \text{ откуда } A = -1, \\ x = 1 & 3 = 3B, \text{ откуда } B = 1, \\ x = -2 & 6 = 6C, \text{ откуда } C = 1. \end{array}$$

Теперь разложение (3) мы можем переписать в виде

$$\frac{x^2 + 2}{x^3 + x^2 - 2x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}.$$

Подставляя полученное выражение в заданный интеграл и производя почленное интегрирование, получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx &= -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+2} = \\ &= -\ln|x| + \ln|x-1| + \ln|x+2| + C = \\ &= \ln \left| \frac{(x-1)(x+2)}{x} \right| + C. \end{aligned}$$

Случай 2. В разложение знаменателя рациональной функции входят только множители первой степени и некоторые из них повторяются.

181. Найти интеграл:

$$\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+1)}.$$

Решение. Знаменатель подынтегральной дроби содержит однократный множитель $x+1$ и двукратный множитель $x+2$, поэтому в данном случае получим следующее разложение на простейшие дроби:

$$\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2}. \quad (5)$$

Приводим теперь к общему знаменателю и отбрасываем его. Получим тождество:

$$x^2 = A(x+2)^2 + B_1(x+1)(x+2) + B_2(x+1), \quad (6)$$

справедливое при любых значениях x . Мы можем здесь назвать лишь два значения x , обращающие в нуль какие-нибудь из слагаемых в равенстве (6), это $x = -1$ и $x = -2$; однако нам надо отыскать три неопределенных коэффициента A, B_1, B_2 , поэтому дадим x еще одно (любое) значение, например $x=0$. Подставив поочередно эти три значения в равенстве (6), получим:

$$\begin{array}{l|l} x = -1 & 1 = A \\ x = -2 & 4 = -B_2 \\ x = 0 & 0 = 4A + 2B_1 + B_2, \end{array} \quad \text{откуда } B_1 = 0.$$

Итак, имеем:

$$\frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2}.$$

Следовательно, искомый интеграл равен:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+1)} &= \int \frac{dx}{x+1} - 4 \int \frac{dx}{(x+2)^2} = \\ &= \ln|x+1| + \frac{4}{x+2} + C. \end{aligned}$$

182. Найти интеграл:

$$\int \frac{6x+6}{x^3(2x+3)^2} dx.$$

Решение. Для заданной подынтегральной дроби разложение будет иметь вид:

$$\frac{6x+6}{x^3(2x+3)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B_1}{2x+3} + \frac{B_2}{(2x+3)^2}, \quad (7)$$

так как в знаменателе множитель x повторяется трижды, а множитель $2x + 3$ повторяется дважды. Приводя к общему знаменателю, получим:

$$6x + 6 = A_1 x^2 (2x + 3)^2 + A_2 x (2x + 3)^2 + A_3 (2x + 3)^2 + B_1 x^3 (2x + 3) + B_2 x^3. \quad (8)$$

При необходимости определить пять коэффициентов A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 мы здесь можем назвать лишь два значения x ($x = 0$ и $x = -\frac{3}{2}$), которые обращают в нуль какие-нибудь из слагаемых в правой части равенства (8). Поэтому одновременно воспользуемся здесь и способом, указанным в решении задачи 131, т. е. приравняем в обеих частях тождества (8) коэффициенты при одинаковых степенях x . Так как нам необходимо вычислить пять коэффициентов A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 , то мы найдем значения тождества (8) при $x = 0$, при $x = -\frac{3}{2}$, а также сравним в обеих частях этого тождества коэффициенты, например, при x^4, x^2 и x . Получим:

$$\begin{array}{l|l} x = 0 & 6 = 9A_3, \text{ откуда } A_3 = \frac{2}{3}, \\ x = -\frac{3}{2} & -3 = -\frac{27}{8}B_2, \text{ откуда } B_2 = \frac{8}{9}, \\ x^4 & 0 = 4A_1 + 2B_1, \\ x^2 & 0 = 9A_1 + 12A_2 + 4A_3, \\ x^1 & 6 = 9A_2 + 12A_3. \end{array}$$

Подставив в последнее уравнение значение $A_3 = \frac{2}{3}$, мы найдем $A_2 = -\frac{2}{9}$. Затем из предпоследнего уравнения найдем $A_1 = 0$ и из первого уравнения находим $B_1 = 0$. Итак, мы получили разложение:

$$\frac{6x + 6}{x^3(2x + 3)^2} = -\frac{2}{9x^2} + \frac{2}{3x^3} + \frac{8}{9(2x + 3)^2}.$$

Искомый интеграл теперь легко вычисляем:

$$\begin{aligned} \int \frac{(6x + 6) dx}{x^3(2x + 3)^2} &= -\frac{2}{9} \int \frac{dx}{x^2} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^3} + \frac{8}{9} \int \frac{dx}{(2x + 3)^2} = \\ &= \frac{2}{9x} - \frac{1}{3x^2} - \frac{4}{9(2x + 3)} + C = \\ &= \frac{4x^2 + 6x - 6x - 9 - 4x^2}{9x^2(2x + 3)} + C = -\frac{1}{x^2(2x + 3)} + C. \end{aligned}$$

Заданный интеграл можно вычислить иным путем, именно с помощью подстановки

$$\frac{2x + 3}{x} = z.$$

Предлагаем это проделать читателю.

З а м е ч а н и е. Интеграл, рассмотренный в задаче 182, представляет собой частный случай интеграла

$$\int \frac{dx}{(x - a)^n (x - b)^m},$$

в котором n и m — целые положительные числа. Интеграл такого типа может быть взят намного проще, чем по общему правилу, с помощью подстановки

$$\frac{x - a}{x - b} = z.$$

Подробнее смотрите учебник А. Ф. Берманта «Курс математического анализа» (ч. I, изд. 12, Физматгиз, 1958).

Укажем еще один прием вычисления неопределенных коэффициентов, особенно удобный в тех случаях, когда необходимо вычислить лишь какую-то группу коэффициентов. Проиллюстрируем этот прием на примере 182. Для данного в нем интеграла мы представили разложение рациональной дроби в следующем виде:

$$\frac{6x + 6}{x^3 (2x + 3)^2} \equiv \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B_1}{2x + 3} + \frac{B_2}{(2x + 3)^2}. \quad (7')$$

Многочлен в знаменателе дроби имеет трехкратный корень $\alpha_1 = 0$ и двукратный корень $\alpha_2 = -\frac{3}{2}$.

Займемся сначала отысканием группы неопределенных коэффициентов A_1, A_2, A_3 (все слагаемые в правой части (7'), не содержащие этих коэффициентов, обозначим через $f(x)$). Для этого обе части равенства (7') умножим на $(x - \alpha_1)^3$, т. е. в нашем случае просто на x^3 , поскольку $\alpha_1 = 0$ есть трехкратный корень знаменателя дроби. Мы получим следующее тождество:

$$\frac{6x + 6}{(2x + 3)^2} \equiv A_1 x^2 + A_2 x + A_3 + x^3 f(x) \quad (9)$$

относительно переменного x , которое, следовательно,

справедливо при любом значении x . Положив в (9) $x = 0$, получим коэффициент A_3 :

$$A_3 = \left. \frac{6x + 6}{(2x + 3)^2} \right|_{x=0} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}. \quad (10)$$

Продифференцируем теперь тождество (9) по x . Мы получим следующее тождество:

$$\left[\frac{6x + 6}{(2x + 3)^2} \right]' = 2A_1x + A_2 + 3x^2 f(x) + x^3 f'(x). \quad (11)$$

Полагая в нем снова $x = 0$, найдем коэффициент A_2 :

$$\begin{aligned} A_2 &= \left[\frac{6x + 6}{(2x + 3)^2} \right]' \Big|_{x=0} = \frac{(2x + 3)^2 \cdot 6 - (6x + 6) \cdot 2(2x + 3) \cdot 2}{(2x + 3)^4} \Big|_{x=0} = \\ &= \frac{6(2x + 3) - 4(6x + 6)}{(2x + 3)^3} \Big|_{x=0} = -\frac{12x + 6}{(2x + 3)^3} \Big|_{x=0} = -\frac{6}{27} = -\frac{2}{9}, \end{aligned} \quad (12)$$

так как все остальные слагаемые обратятся в нуль при $x = 0$. Продифференцировав тождество (11) по x , получим снова тождество:

$$\left[\frac{6x + 6}{(2x + 3)^2} \right]'' = 2A_1 + [3x^2 f(x) + x^3 f'(x)]'.$$

При $x = 0$ получим:

$$\left[\frac{6x + 6}{(2x + 3)^2} \right]'' \Big|_{x=0} = 2A_1, \quad (13)$$

так как все остальные члены правой части обратятся при этом в нуль. Из равенства (13) находим A_1 :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \left[\frac{6x + 6}{(2x + 3)^2} \right]'' \Big|_{x=0} = \left[-\frac{6x + 3}{(2x + 3)^3} \right]' \Big|_{x=0} = \\ &= -\frac{(2x + 3)^3 \cdot 6 - (6x + 3) \cdot 3(2x + 3)^2 \cdot 2}{(2x + 3)^6} \Big|_{x=0} = \frac{6(6x + 3) - 6(2x + 3)}{(2x + 3)^4} \Big|_{x=0} = 0. \end{aligned}$$

Итак, мы нашли те же значения коэффициентов A_1, A_2, A_3 :

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -\frac{2}{9}, \quad A_3 = \frac{2}{3},$$

которые ранее в примере 182 (см. стр. 47) были получены другим путем.

Рассуждая точно так же в общем случае, мы легко получим следующие общие формулы для отыскания

неопределенных коэффициентов рациональной дроби. Именно, пусть задана правильная несократимая рациональная дробь вида

$$r(x) = \frac{R(x)}{S(x)}, \quad (14)$$

где $R(x)$ и $S(x)$ — многочлены. Рассмотрим лишь случай, когда корни многочлена $S(x)$ все вещественны. Тогда, если для многочлена n -й степени $S(x)$ его разложение на множители имеет вид:

$$S(x) = A(x - \alpha_1)^{q_1} (x - \alpha_2)^{q_2} \dots (x - \alpha_s)^{q_s}, \quad (15)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ — корни $S(x)$, а q_1, q_2, \dots, q_s — соответственно их кратности, причем $q_1 + q_2 + \dots + q_s = n$, то разложение рациональной дроби (14) на простейшие можно представить в виде:

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{R(x)}{A(x - \alpha_1)^{q_1} (x - \alpha_2)^{q_2} \dots (x - \alpha_s)^{q_s}} = \\ &= \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{(x - \alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{q_1-1}}{(x - \alpha_1)^{q_1-1}} + \frac{A_{q_1}}{(x - \alpha_1)^{q_1}} + \\ &+ \frac{B_1}{x - \alpha_2} + \frac{B_2}{(x - \alpha_2)^2} + \dots + \frac{B_{q_2-1}}{(x - \alpha_2)^{q_2-1}} + \frac{B_{q_2}}{(x - \alpha_2)^{q_2}} + \\ &\dots \dots \dots \\ &+ \frac{L_1}{x - \alpha_s} + \frac{L_2}{(x - \alpha_s)^2} + \dots + \frac{L_{q_s-1}}{(x - \alpha_s)^{q_s-1}} + \frac{L_{q_s}}{(x - \alpha_s)^{q_s}}. \end{aligned} \quad (16)$$

В этом случае неопределенные коэффициенты можно вычислить по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} A_{q_1} &= \frac{R(x)}{A(x - \alpha_2)^{q_2} \dots (x - \alpha_s)^{q_s}} \Big|_{x = \alpha_1}, \\ A_{q_1-1} &= \frac{d}{dx} \left[\frac{R(x)}{A(x - \alpha_2)^{q_2} \dots (x - \alpha_s)^{q_s}} \right] \Big|_{x = \alpha_1}, \\ &\dots \dots \dots \\ A_2 &= \frac{1}{(q_1 - 2)!} \frac{d^{q_1-2}}{dx^{q_1-2}} \left[\frac{R(x)}{A(x - \alpha_2)^{q_2} \dots (x - \alpha_s)^{q_s}} \right] \Big|_{x = \alpha_1}, \\ A_1 &= \frac{1}{(q_1 - 1)!} \frac{d^{q_1-1}}{dx^{q_1-1}} \left[\frac{R(x)}{A(x - \alpha_2)^{q_2} \dots (x - \alpha_s)^{q_s}} \right] \Big|_{x = \alpha_1}; \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$B_{q_2} = \frac{R(x)}{A(x-a_1)^{q_1}(x-a_3)^{q_3}\dots(x-a_s)^{q_s}} \Big|_{x=a_2},$$

$$\dots \dots \dots (18)$$

$$B_1 = \frac{1}{(q_2-1)!} \frac{d^{q_2-1}}{dx^{q_2-1}} \left[\frac{R(x)}{A(x-a_1)^{q_1}(x-a_3)^{q_3}\dots(x-a_s)^{q_s}} \right] \Big|_{x=a_2},$$

$$L_{q_s} = \frac{R(x)}{A(x-a_1)^{q_1}\dots(x-a_{s-1})^{q_{s-1}}} \Big|_{x=a_s},$$

$$\dots \dots \dots (19)$$

$$L_1 = \frac{1}{(q_s-1)!} \frac{d^{q_s-1}}{dx^{q_s-1}} \left[\frac{R(x)}{A(x-a_1)^{q_1}\dots(x-a_{s-1})^{q_{s-1}}} \right] \Big|_{x=a_s}.$$

С помощью формул (17)—(19) определим теперь коэффициенты B_1 и B_2 в разложении (7) для примера 182. Итак, имеем:

$$B_2 = \frac{6x+6}{x^3} \Big|_{x=-\frac{3}{2}} = \frac{6 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 6}{-\frac{27}{8}} = -\frac{8}{9},$$

$$B_1 = \frac{d}{dx} \left[\frac{6x+6}{x^3} \right] \Big|_{x=-\frac{3}{2}} = 6 \frac{x^3 - (x+1)3x^2}{x^6} \Big|_{x=-\frac{3}{2}} =$$

$$= 6 \frac{x - 3(x+1)}{x^4} \Big|_{x=-\frac{3}{2}} = 0.$$

Мы снова получили те же значения коэффициентов B_1 и B_2 , как и в решении примера 182.

Применим рассмотренный прием к разложению на простейшие дроби рациональной функции из примера 181. На основании формул (17)—(19) найдем коэффициенты A , B_1 и B_2 разложения (5):

$$A = \frac{x^2}{(x+2)^2} \Big|_{x=-1} = \frac{(-1)^2}{(-1+2)^2} = 1,$$

$$B_2 = \frac{x^2}{x+1} \Big|_{x=-2} = \frac{(-2)^2}{-2+1} = -4,$$

$$B_1 = \frac{d}{dx} \left[\frac{x^2}{x+1} \right] \Big|_{x=-2} = \frac{(x+1)2x - x^2}{(x+1)^2} \Big|_{x=-2} =$$

$$= \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \Big|_{x=-2} = 0.$$

Итак, $A = 1$, $B_1 = 0$, $B_2 = -4$, что совпадает с полученными ранее (см. стр. 46) значениями этих коэффициентов.

Если многочлен $S(x)$ имеет только простые корни, т. е.

$$S(x) = A(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_s), \quad (20)$$

то разложение (16) для рациональной дроби (14) примет более простой вид:

$$r(x) = \frac{R(x)}{A(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_s)} =$$

$$= \frac{A}{x - a_1} + \frac{B}{x - a_2} + \frac{C}{x - a_3} + \dots + \frac{L}{x - a_s}. \quad (21)$$

В этом случае для отыскания неопределенных коэффициентов A, B, \dots, L достаточны будут только первые из формул (17) — (19), которые можно представить в более простом виде. В самом деле, легко видеть, что если $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ — простые корни многочлена $S(x)$, то

$$\left. \begin{aligned} A(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_s)|_{x=\alpha_1} &= S'(x)|_{x=\alpha_1}, \\ A(x - \alpha_1)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_s)|_{x=\alpha_2} &= S'(x)|_{x=\alpha_2}, \\ . &. \\ A(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{s-1})|_{x=\alpha_s} &= S'(x)|_{x=\alpha_s}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Поэтому в случае простых корней многочлена $S(x)$ формулы для определения коэффициентов A, B, \dots, L примут вид:

$$A = \frac{R(x)}{S'(x)} \Big|_{x=\alpha_1}, B = \frac{R(x)}{S'(x)} \Big|_{x=\alpha_2}, \dots, L = \frac{R(x)}{S'(x)} \Big|_{x=\alpha_s}. \quad (23)$$

Применим рассмотренный прием к отысканию неопределенных коэффициентов разложения рациональной дроби примера 179. В этом примере (см. стр. 43)

$$R(x) = x^2 - x + 2, \quad S(x) = x^4 - 5x^2 + 4, \quad S'(x) = 4x^3 - 10x,$$

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = -2, \quad a_4 = 2.$$

Таким образом, по формулам (23) находим неопределенные коэффициенты в разложении (1):

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2 - x + 2}{4x^3 - 10x} \bigg|_{x=-1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \\ B &= \frac{x^2 - x + 2}{4x^3 - 10x} \bigg|_{x=1} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}, \\ C &= \frac{x^2 - x + 2}{4x^3 - 10x} \bigg|_{x=-2} = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}, \end{aligned}$$

$$D = \frac{x^2 - x + 2}{4x^3 - 10x} \Big|_{x=2} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3},$$

что совпадает с решением примера 179 (см. стр. 44).

Рассмотрим разложение рациональной дроби примера 180:

$$R(x) = x^2 + 2, S(x) = x^3 + x^2 - 2x, S'(x) = 3x^2 + 2x - 2,$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = -2.$$

По формулам (23) находим:

$$A = \frac{x^2 + 2}{3x^2 + 2x - 2} \Big|_{x=0} = -1,$$

$$B = \frac{x^2 + 2}{3x^2 + 2x - 2} \Big|_{x=1} = 1,$$

$$C = \frac{x^2 + 2}{3x^2 + 2x - 2} \Big|_{x=-2} = 1,$$

что совпадает со значениями этих коэффициентов, найденными на стр. 45.

Указанный прием можно применить к отысканию коэффициентов, соответствующих только простым корням многочлена $S(x)$, и в том случае, когда другие его корни кратные или комплексные.

Случай 3. В разложение знаменателя рациональной функции входят множители второй степени (неразложимые на вещественные множители первой степени) и ни один из них не повторяется.

183. Найти интеграл:

$$\int \frac{x^4 dx}{x^3 + 1}.$$

Решение. Предварительно исключаем целую часть рациональной дроби. Имеем:

$$\frac{x^4}{x^3 + 1} = x - \frac{x}{x^3 + 1}.$$

Таким образом, получаем:

$$\int \frac{x^4 dx}{x^3 + 1} = \int x dx - \int \frac{x dx}{x^3 + 1} = \frac{x^2}{2} - \int \frac{x dx}{x^3 + 1}. \quad (24)$$

Далее, так как $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$, причем второй сомножитель не разлагается на вещественные множители первой степени, то разложение данной дроби будет иметь вид:

$$\frac{x}{x^3 + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}.$$

Освобождаемся от знаменателя:

$$x = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1),$$

и в полученном тождестве сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа:

$$\begin{aligned} x^2 & \Big| 0 = A + B, \\ x^1 & \Big| 1 = -A + B + C, \\ x^0 & \Big| 0 = A + C. \end{aligned}$$

Мы получили систему трех уравнений относительно коэффициентов A , B , C . Решая ее, находим:

$$A = -\frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, имеем:

$$\frac{x}{x^3 + 1} = -\frac{1}{3(x + 1)} + \frac{1}{3} \frac{x + 1}{x^2 - x + 1}.$$

Теперь интегрируем:

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{x^3 + 1} &= -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{x + 1} + \frac{1}{3} \int \frac{(x + 1) dx}{x^2 - x + 1} = \\ &= -\frac{1}{3} \ln |x + 1| + \frac{1}{3} \int \frac{(x + 1) dx}{x^2 - x + 1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Оставшийся интеграл берем подстановкой (см. решение задачи 130):

$$2x - 1 = z, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{z + 1}{2}, \quad dx = \frac{dz}{2},$$

$$x^2 - x + 1 = \frac{1}{4}(z^2 + 3), \quad x + 1 = \frac{z + 1}{2} + 1 = \frac{z + 3}{2}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int \frac{(x + 1) dx}{x^2 - x + 1} &= \frac{1}{3} \int \frac{(z + 3) \cdot 4 dz}{2(z^2 + 3) \cdot 2} = \frac{1}{3} \int \frac{(z + 3) dz}{z^2 + 3} = \frac{1}{6} \int \frac{2z dz}{z^2 + 3} + \\ &+ \int \frac{dz}{z^2 + 3} = \frac{1}{6} \ln(z^2 + 3) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{3}} - C_1 = \\ &= \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} - C, \end{aligned}$$

где

$$C = \frac{1}{6} \ln 4 + C_1.$$

Вставляя полученное в равенства (25) и (24), окончательно получим:

$$\int \frac{x^4 dx}{x^3 + 1} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \ln |x + 1| - \frac{1}{6} \ln (x^2 - x + 1) - \\ - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

184. Найти интеграл:

$$\int \frac{x^3 + 4x^2 + 6}{(x+1)^2 (x^2 + 2)} dx.$$

Решение. Здесь разложение рациональной дроби имеет вид:

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 6}{(x+1)^2 (x^2 + 2)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2}.$$

Освобождаясь от знаменателя, получаем тождество:

$$x^3 + 4x^2 + 6 = \\ = A_1 (x+1) (x^2 + 2) + A_2 (x^2 + 2) + (Bx+C) (x+1)^2. \quad (26)$$

Приравниваем в нем коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 1 = A_1 + B, \\ x^2 & 4 = A_1 + A_2 + 2B + C, \\ x^1 & 0 = 2A_1 + B + 2C, \\ x^0 & 6 = 2A_1 + 2A_2 + C. \end{array}$$

Решая эту систему четырех уравнений, находим:

$$A_1 = \frac{1}{3}, \quad A_2 = 3, \quad B = \frac{2}{3}, \quad C = -\frac{2}{3}.$$

Таким образом, разложение данной рациональной дроби имеет вид:

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 6}{(x+1)^2 (x^2 + 2)} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2(x-1)}{3(x^2+2)}.$$

Теперь остается проинтегрировать, и мы найдем иско-
мый интеграл:

$$\int \frac{x^3 + 4x^2 + 6}{(x+1)^2 (x^2 + 2)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} + 3 \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{1}{3} \int \frac{2x dx}{x^2 + 2} - \\ - \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^2 + 2} = \frac{1}{3} \ln |x+1| - \frac{3}{x+1} + \frac{1}{3} \ln (x^2 + 2) - \\ - \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Случай 4. В разложение знаменателя рациональной функции входят множители второй степени (неразложимые на вещественные множители первой степени) и некоторые из них повторяются.

Здесь речь идет о том, что в разложение знаменателя входят множители вида $(ax^2 + bx + c)^n$. В § 4 главы I мы уже показали, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ можно привести к каноническому виду $k^2z^2 + m^2$. Поэтому в случае 4 нам обязательно придется иметь дело с интегралами вида

$$\int \frac{(pz + q) dz}{(k^2z^2 + m^2)^n}.$$

Этот интеграл равен сумме двух интегралов:

$$\int \frac{(pz + q) dz}{(k^2z^2 + m^2)^n} = p \int \frac{z dz}{(k^2z^2 + m^2)^n} + q \int \frac{dz}{(k^2z^2 + m^2)^n},$$

из которых первый берется очень легко:

$$p \int \frac{z dz}{(k^2z^2 + m^2)^n} = \frac{p}{2k^2} \int \frac{d(k^2z^2 + m^2)}{(k^2z^2 + m^2)^n} = \frac{-p}{k^2(2n-2)} \cdot \frac{1}{(k^2z^2 + m^2)^{n-1}},$$

а второй приводится к более простому виду подстановкой

$$kz = t, \text{ откуда } k dz = dt.$$

В самом деле,

$$q \int \frac{dz}{(k^2z^2 + m^2)^n} = \frac{q}{k} \int \frac{k dz}{[(kz)^2 + m^2]^n} = \frac{q}{k} \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^n}.$$

Выведем поэтому формулу приведения для интеграла

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^n} \quad (n — \text{целое положительное}).$$

При $n = 1$ имеем:

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + m^2} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{t}{m} \quad (27)$$

(мы берем одно из его значений). Примем теперь, что $n > 1$. Заменив в числителе множитель 1 частным

$$1 = \frac{(t^2 + m^2) - t^2}{m^2},$$

мы получим:

$$I_n = \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{n-1}} - \frac{1}{m^2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + m^2)^n}.$$

Второй интеграл возьмем по частям, положив в нем

$$u = t, \quad dv = \frac{t \, dt}{(t^2 + m^2)^n}, \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} du = dt, \\ v = \int \frac{t \, dt}{(t^2 + m^2)^n} = \\ = -\frac{1}{(2n-2)(t^2 + m^2)^{n-1}}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$-\frac{1}{m^2} \int \frac{t^2 \, dt}{(t^2 + m^2)^n} = \\ = \frac{t}{m^2 (2n-2)(t^2 + m^2)^{n-1}} - \frac{1}{m^2 (2n-2)} \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{n-1}},$$

следовательно,

$$I_n = \frac{1}{m^2} I_{n-1} + \frac{t}{m^2 (2n-2)(t^2 + m^2)^{n-1}} - \frac{1}{m^2 (2n-2)} I_{n-1} = \\ = \frac{1}{m^2 (2n-2)} \cdot \frac{t}{(t^2 + m^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{m^2 (2n-2)} I_{n-1}.$$

Мы получили, таким образом, формулу приведения:

$$\int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^n} = \frac{1}{m^2 (2n-2)} \cdot \frac{t}{(t^2 + m^2)^{n-1}} + \\ + \frac{2n-3}{m^2 (2n-2)} \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{n-1}} \quad (n > 1). \quad (28)$$

С ее помощью мы можем, например, легко вычислить интеграл

$$\int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^3}.$$

В самом деле, применяя формулу (28), найдем:

$$\int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^3} = \frac{1}{4m^2} \cdot \frac{t}{(t^2 + m^2)^2} + \frac{3}{4m^2} \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^2}, \\ \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^2} = \frac{1}{2m^2} \cdot \frac{t}{t^2 + m^2} + \frac{1}{2m^2} \int \frac{dt}{t^2 + m^2}, \\ \int \frac{dt}{t^2 + m^2} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{t}{m} \quad [\text{см. формулу (27)}];$$

поэтому

$$\int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^3} = \frac{1}{4m^2} \cdot \frac{t}{(t^2 + m^2)^2} + \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot m^4} \cdot \frac{t}{t^2 + m^2} + \\ + \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot m^5} \operatorname{arctg} \frac{t}{m} + C.$$

185. Найти интеграл:

$$\int \frac{3x + 1}{x(1 + x^2)^2} dx.$$

Решение. Разложим данную дробь на простейшие:

$$\frac{3x + 1}{x(1 + x^2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B_1 x + C_1}{1 + x^2} + \frac{B_2 x + C_2}{(1 + x^2)^2}.$$

После приведения к общему знаменателю получаем следующее тождество:

$$3x + 1 = A(1 + x^2)^2 + (B_1 x + C_1)x(1 + x^2) + (B_2 x + C_2)x. \quad (29)$$

Коэффициенты A , B_1 , C_1 , B_2 и C_2 находим, приравняв в тождестве (29) коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа. Имеем:

$$\begin{aligned} 3x + 1 &= \\ &= A(x^4 + 2x^2 + 1) + (B_1 x + C_1)(x^3 + x) + B_2 x^2 + C_2 x = \\ &= (A + B_1)x^4 + C_1 x^3 + (2A + B_1 + B_2)x^2 + \\ &\quad + (C_1 + C_2)x + A. \end{aligned}$$

Следовательно, получаем систему:

$$\begin{cases} A + B_1 = 0, \\ C_1 = 0, \\ 2A + B_1 + B_2 = 0, \\ C_1 + C_2 = 3, \\ A = 1, \end{cases}$$

решая которую легко находим:

$$A = 1, \quad B_1 = -1, \quad C_1 = 0, \quad B_2 = -1, \quad C_2 = 3.$$

Итак, мы получили разложение:

$$\frac{3x + 1}{x(1 + x^2)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1 + x^2} + \frac{-x + 3}{(1 + x^2)^2}.$$

Искомый интеграл, следовательно, равен:

$$\int \frac{(3x + 1) dx}{x(1 + x^2)^2} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x dx}{1 + x^2} - \int \frac{(x - 3) dx}{(1 + x^2)^2}. \quad (30)$$

Первые два интеграла в правой части берутся легко (первый из них табличный, а во втором производная знаменателя отличается множителем от числителя):

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x|, \quad \int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

Займемся теперь третьим интегралом правой части. Разобьем его на два интеграла и преобразуем так:

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-3) dx}{(1+x^2)^2} &= \int \frac{x dx}{(1+x^2)^2} - 3 \int \frac{(1+x^2-x^2) dx}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{(1+x^2)^2} - 3 \int \frac{dx}{1+x^2} + 3 \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} *) = \\ &= \frac{-1}{2(1+x^2)} - 3 \operatorname{arctg} x + 3 \left[-\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} \right] = \\ &= -\frac{1}{2(1+x^2)} - 3 \operatorname{arctg} x - \frac{3x}{2(1+x^2)} + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} x - C = \\ &= -\frac{3x+1}{2(1+x^2)} - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} x - C. \end{aligned}$$

Собирая воедино все интегралы равенства (30), окончательно получим:

$$\begin{aligned} &\int \frac{(3x+1) dx}{x(1+x^2)^2} = \\ &= \ln |x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{3x+1}{2(1+x^2)} + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Мы могли бы воспользоваться здесь и готовой формулой приведения (28).

В задачах 186—207 определить сначала, к какому из разобранных выше 4-х случаев относится интеграл, и вычислить эти интегралы.

$$186. \int \frac{(7x-22) dx}{(x-1)(x^2-4)}.$$

$$187. \int \frac{60 dx}{(x-2)(3x^2+2x-1)}.$$

$$188. \int \frac{x^4+2}{x^3-x} dx.$$

$$189. \int \frac{(x^2-2x+2) dx}{(x^2+x-2)(x^2-3x)}.$$

$$190. \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx.$$

$$191. \int \frac{x^4 dx}{(x-1)(x^2+3x+2)}.$$

$$192. \int \frac{(x^2+1) dx}{x(x^2-1)}.$$

$$193. \int \frac{2x^2+6x+6}{2x^3+5x^2+3x} dx.$$

*) Последний интеграл берем по частям, полагая

$$u = x, \quad dv = \frac{x dx}{(1+x^2)^2}, \quad \text{откуда} \begin{cases} du = dx, \\ v = \int \frac{x dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2(1+x^2)}. \end{cases}$$

$$194. \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx.$$

$$195. \int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2}.$$

$$196. \int \frac{x^2 dx}{(x + 1)(x - 1)^2}.$$

$$197. \int \frac{x^2 dx}{(x^2 - 4)^2}.$$

$$198. \int \frac{x^2 dx}{(x + 2)^2 (x + 4)^2}.$$

$$199. \int \frac{dx}{1 - x^4}.$$

$$200. \int \frac{x dx}{x^3 - 1}.$$

$$201. \int \frac{x^2 dx}{1 - x^4}.$$

$$202. \int \frac{dx}{(x + 1)^2 (x^2 + 1)}.$$

$$203. \int \frac{x^2 dx}{x^3 + 1}.$$

$$204. \int \frac{x^3 dx}{x^3 - 1}.$$

$$205. \int \frac{(x^4 + 1) dx}{x (x^2 + 1)^2}.$$

$$206. \int \frac{(2x^2 + 1) dx}{x^3 (x^2 + 1)^2}.$$

$$207. \int \frac{2x dx}{(1 + x)(1 + x^2)^2}.$$

§ 2. Интегрирование некоторых выражений, содержащих радикалы

Предварительно изучите по учебнику Г. М. Фихтенгольца главу X, п° 168.

208. Найти интеграл:

$$\int \frac{1}{(2 - x)^2} \sqrt[3]{\frac{2 - x}{2 + x}} dx.$$

Решение. Воспользуемся подстановкой

$$\sqrt[3]{\frac{2 - x}{2 + x}} = t.$$

Имеем:

$$\frac{2 - x}{2 + x} = t^3, \quad 2 - x = (2 + x) t^3, \quad 2 - 2t^3 = x + xt^3 = x(1 + t^3),$$

$$x = \frac{2 - 2t^3}{1 + t^3}, \quad 2 - x = 2 - \frac{2 - 2t^3}{1 + t^3} = \frac{2 + 2t^3 - 2 + 2t^3}{1 + t^3} = \frac{4t^3}{1 + t^3},$$

$$\begin{aligned} dx &= \frac{(1 + t^3) \cdot (-6t^2) - (2 - 2t^3) 3t^2}{(1 + t^3)^2} dt = \\ &= \frac{-6t^2 - 6t^5 - 6t^2 + 6t^5}{(1 + t^3)^2} dt = \frac{-12t^2}{(1 + t^3)^2} dt. \end{aligned}$$

Подставив все полученное в заданный интеграл, будем иметь:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} dx &= - \int \frac{(1+t^3)^2 \cdot t \cdot 12t^2}{16t^6 (1+t^3)^2} dt = \\ &= -\frac{3}{4} \int \frac{dt}{t^3} = \frac{3}{8t^2} + C = \frac{3}{8} \sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C. \end{aligned}$$

209. Найти интеграл:

$$\int \frac{(\sqrt[6]{2x-1} + 1) dx}{(2x-1)(\sqrt[3]{2x-1} - 1)}.$$

Решение. Введем подстановку

$$\sqrt[6]{2x-1} = z.$$

Предварительно подготовим все для нашего интеграла:

$$\sqrt[3]{2x-1} = z^2, \quad 2x-1 = z^6, \quad 2dx = 6z^5 dz, \quad dx = 3z^5 dz.$$

Подставляя в заданный интеграл, получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{(\sqrt[6]{2x-1} + 1) dx}{(2x-1)(\sqrt[3]{2x-1} - 1)} &= \int \frac{(z+1) 3z^5 dz}{z^6 (z^2-1)} = 3 \int \frac{dz}{z(z-1)} = \\ &= 3 \int \frac{z - (z-1)}{z(z-1)} dz *) = 3 \int \frac{dz}{z-1} - 3 \int \frac{dz}{z} = \\ &= 3 \ln|z-1| - 3 \ln|z| + C = \\ &= 3 \ln|\sqrt[6]{2x-1} - 1| - 3 \ln\sqrt[6]{2x-1} + C. \end{aligned}$$

210. Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3 (x+2)^5}}.$$

Решение. Преобразуем сначала подынтегральную функцию

$$\sqrt[4]{(x-1)^3 (x+2)^5} = (x-1)(x+2) \sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}},$$

а теперь введем подстановку

$$\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}} = t.$$

*) Мы в числителе прибавили z и вычли z .

Отсюда получаем:

$$\frac{x+2}{x-1} = t^4, \quad x+2 = t^4(x-1), \quad 2+t^4 = x(t^4-1),$$

$$x = \frac{t^4+2}{t^4-1}, \quad x-1 = \frac{t^4+2}{t^4-1} - 1 = \frac{3}{t^4-1}, \quad x+2 = \frac{3t^4}{t^4-1},$$

$$dx = \frac{(t^4-1)4t^3 - (t^4+2)4t^3}{(t^4-1)^2} dt = \frac{-12t^3 dt}{(t^4-1)^2}.$$

Таким образом, заданный интеграл примет вид:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}} &= - \int \frac{(t^4-1)(t^4-1)12t^3 dt}{3 \cdot 3t^4 \cdot t(t^4-1)^2} = \\ &= - \frac{4}{3} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{4}{3t} + C = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + C. \end{aligned}$$

211. Найти интеграл:

$$\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx.$$

Решение. Чтобы освободиться от всех радикалов, достаточно воспользоваться подстановкой

$$\sqrt[6]{x} = t.$$

Тогда

$$x = t^6, \quad dx = 6t^5 dt, \quad \sqrt[3]{x} = t^2, \quad \sqrt[3]{x^2} = t^4$$

и интеграл примет вид:

$$\begin{aligned} \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx &= \int \frac{(t^6 + t^4 + t)6t^5 dt}{t^6(1 + t^2)} = \\ &= 6 \int \frac{t^5 + t^3 + 1}{1 + t^2} dt = 6 \int \frac{t^3(t^2 + 1) + 1}{1 + t^2} dt = \\ &= 6 \int t^3 dt + 6 \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{3}{2} t^4 + 6 \operatorname{arctg} t + C = \\ &= \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C. \end{aligned}$$

В задачах 212—224, воспользовавшись соответствующими подстановками, вычислить заданные интегралы.

212. $\int \frac{\sqrt[4]{4+x}}{x} dx.$

213. $\int \frac{1}{(1-x)^2} \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} dx.$

214. $\int x \sqrt{1+x} dx.$

215. $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x+a}}.$

$$216. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2 (x-1)^4}}. \quad 217. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}.$$

Указание. В задаче 216 вынести за знак корня $(x+1)(x-1)$ (см. решение задачи 210).

$$\begin{aligned} 218. & \int \frac{dx}{(x-1)(2+\sqrt[5]{x-1})}. & 219. & \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}}. \\ 220. & \int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x}} dx. & 221. & \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1 - \sqrt[3]{x})} dx. \\ 222. & \int \frac{1 - 2\sqrt{x}}{1 + 2\sqrt{x}} dx. & 223. & \int \frac{dx}{(1 + \sqrt[3]{x^2})x}. \\ 224. & \int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}} dx. \end{aligned}$$

§ 3. Интегрирование биномиальных дифференциалов

Предварительно изучите по учебнику Г. М. Фихтенгольца главу X, п° 169.

Биномиальным дифференциалом называется выражение

$$x^m (a + bx^n)^p dx,$$

в котором m, n, p — рациональные числа, a, b — постоянные, отличные от нуля. Интеграл

$$I = \int x^m (a + bx^n)^p dx$$

берется лишь в следующих трех случаях.

Случай 1. Показатель p есть целое число; интегралы берутся аналогично рассмотренным в предыдущем параграфе.

Случай 2. $\frac{m+1}{n}$ есть целое число; интегралы берутся подстановкой

$$a + bx^n = t.$$

Случай 3. $\frac{m+1}{n} + p$ есть целое число; интегралы берутся подстановкой

$$ax^{-n} + b = t.$$

Рассмотрим задачи на каждый из указанных случаев.

225. Найти интеграл:

$$\int x^{-\frac{2}{3}} (x^{\frac{1}{3}} + 1)^{-2} dx.$$

Решение. Здесь $m = -\frac{2}{3}$, $n = \frac{1}{3}$, $p = -2$, т. е. p — целое число. Интеграл относится к первому случаю; он берется так же, как интегралы, рассмотренные в предыдущем параграфе. Вводим подстановку

$$x^{\frac{1}{3}} = t, \text{ откуда } x = t^3, dx = 3t^2 dt, x^{-\frac{2}{3}} = (t^3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{t^2}.$$

Заданный интеграл равен:

$$\begin{aligned} \int x^{-\frac{2}{3}} (x^{\frac{1}{3}} + 1)^{-2} dx &= 3 \int \frac{t^2 dt}{t^2 (t + 1)^2} = 3 \int \frac{dt}{(t + 1)^2} = \\ &= -\frac{3}{t + 1} + C = -\frac{3}{\sqrt[3]{x} + 1} + C. \end{aligned}$$

226. Найти интеграл:

$$\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

Решение. Перепишем наш интеграл в виде

$$\int x^{-\frac{2}{3}} (1 + x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} dx.$$

Теперь сразу видно, что $m = -\frac{2}{3}$, $n = \frac{1}{3}$, $p = \frac{1}{2}$ и

$$\frac{m + 1}{n} = \frac{-\frac{2}{3} + 1}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1$$

есть целое число, т. е. мы имеем второй случай, следовательно, здесь нужно ввести подстановку

$$a + bx^n = t.$$

Таким образом, для заданного интеграла берем подстановку

$$1 + x^{\frac{1}{3}} = t,$$

откуда находим

$$x^{\frac{1}{3}} = t - 1, \quad x = (t - 1)^3, \quad dx = 3(t - 1)^2 dt,$$

$$x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{(t - 1)^2}.$$

Подставив в интеграл, получим:

$$\int x^{-\frac{2}{3}} (1 + x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} dx = 3 \int \frac{t^{\frac{1}{2}} (t - 1)^2 dt}{(t - 1)^2} = 3 \int t^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$= 2t^{\frac{3}{2}} + C = 2(1 + x^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}} + C.$$

227. Найти интеграл:

$$\int x^{-6} (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Решение. Здесь $m = -6$, $n = 2$, $p = \frac{1}{2}$. Легко видеть, что

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{-6+1}{2} + \frac{1}{2} = -2$$

есть целое число, т. е. мы имеем третий случай, при котором надо воспользоваться подстановкой $ax^{-n} + b = t$.

Таким образом, применительно к заданному интегралу мы берем подстановку

$$x^{-2} + 1 = t,$$

откуда получаем

$$x^{-2} = t - 1, \quad x = \frac{1}{\sqrt{t-1}}, \quad dx = -\frac{1}{2} \frac{dt}{\sqrt{(t-1)^3}},$$

$$(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{t}{t-1}}.$$

Итак,

$$\int x^{-6} (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{(t-1)^3 \sqrt{t} dt}{\sqrt{t-1} \sqrt{(t-1)^3}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int (t-1) t^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{2} \int t^{\frac{3}{2}} dt + \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$= -\frac{1}{5} t^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= -\frac{1}{5} \left(\frac{1+x^2}{x^2} \right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3} \left(\frac{1+x^2}{x^2} \right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

В задачах 228—233 вычислить интегралы от биномиальных дифференциалов, предварительно определив, к какому случаю каждый из них относится.

$$228. \int \frac{dx}{x(1 + \sqrt[3]{x})^2}.$$

$$229. \int \frac{dx}{(1 + \sqrt{x})^3}.$$

У к а з а н и е. Интеграл задачи 229 можно представить в виде $\int x^0 (1 + x^{\frac{1}{2}})^{-3} dx$; теперь ясно, что здесь $m=0$, $n=\frac{1}{2}$, $p=-3$.

$$230. \int x^{\frac{1}{3}} (2 + x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}} dx.$$

$$231. \int x^3 (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} dx.$$

$$232. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}.$$

$$233. \int \frac{dx}{x^2 (1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

§ 4. Подстановки Эйлера

Предварительно изучите по учебнику Г. М. Фихтенгольца главу X, п° 170.

Очень важный класс интегралов:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

приводится к интегралам от рациональных функций с помощью следующих трех подстановок Эйлера.

I. Если $a > 0$, то берется подстановка

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - x\sqrt{a}. \quad (1)$$

II. Если $c > 0$, то берется подстановка

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt - \sqrt{c}. \quad (2)$$

III. Если квадратный трехчлен имеет различные вещественные корни λ и μ , т. е. если

$$ax^2 + bx + c = a(x - \lambda)(x - \mu), \quad (3)$$

то берется подстановка

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda). \quad (4)$$

Подстановки Эйлера часто приводят к весьма громоздким выкладкам, поэтому их следует применять лишь тогда, когда трудно подыскать другой способ для вычисления заданного интеграла.

234. Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

Решение. Здесь $a=1$, $c=2$; следовательно, с одинаковым успехом можно применить как первую, так и вторую подстановки Эйлера. Применим первую подстановку Эйлера:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2} = t - x.$$

Возводим в квадрат, делаем приведение подсбных:

$$x^2 + 2x + 2 = t^2 - 2tx + x^2, \quad 2x + 2tx = t^2 - 2,$$

$$x = \frac{t^2 - 2}{2(1 + t)},$$

$$dx = \frac{(1 + t)2t - (t^2 - 2) \cdot 1}{2(1 + t)^2} dt = \frac{t^2 + 2t + 2}{2(1 + t)^2} dt,$$

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2} &= 1 + t - \frac{t^2 - 2}{2(1 + t)} = \frac{2 + 4t + 2t^2 - t^2 + 2}{2(1 + t)} = \\ &= \frac{t^2 + 4t + 4}{2(1 + t)}. \end{aligned}$$

Подставив в данный интеграл, получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} &= \int \frac{2(1 + t)(t^2 + 2t + 2)}{(t^2 + 4t + 4)2(1 + t)^2} dt = \\ &= \int \frac{(t^2 + 2t + 2) dt}{(1 + t)(t + 2)^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Мы получили в результате интеграл от рациональной дроби (случай 2), знаменатель которой содержит множители первой степени, один из которых повторяется дважды. Пишем разложение на простейшие дроби:

$$\frac{t^2 + 2t + 2}{(t + 1)(t + 2)^2} = \frac{A}{t + 1} + \frac{B}{t + 2} + \frac{C}{(t + 2)^2},$$

$$t^2 + 2t + 2 = A(t + 2)^2 + B(t + 1)(t + 2) + C(t + 1),$$

$$\begin{array}{l|l} t = -1 & 1 = A, \\ t = -2 & 2 = -C, \quad C = -2, \\ t = 0 & 2 = 4A + 2B + C, \text{ откуда } B = 0. \end{array}$$

Итак, имеем:

$$\frac{t^2 + 2t + 2}{(t + 1)(t + 2)^2} = \frac{1}{t + 1} - \frac{2}{(t + 2)^2},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 + 2t + 2}{(t + 1)(t + 2)^2} dt &= \int \frac{dt}{t + 1} - 2 \int \frac{dt}{(t + 2)^2} = \\ &= \ln |t + 1| + \frac{2}{t + 2} + C = \\ &= \ln (x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}) + \frac{2}{x + 2 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} + C. \end{aligned}$$

235. Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{(1 + x) \sqrt{1 + x - x^2}}.$$

Решение. Здесь $c = 1 > 0$, поэтому применим вторую подстановку Эйлера:

$$\sqrt{1 + x - x^2} = xt - 1, \text{ откуда } t = \frac{\sqrt{1 + x - x^2} + 1}{x}.$$

Далее возводим в квадрат, делаем приведение подобных и сокращаем на x :

$$1 + x - x^2 = x^2 t^2 - 2xt + 1, \quad 1 + 2t = x(t^2 + 1),$$

$$x = \frac{1 + 2t}{t^2 + 1},$$

$$dx = \frac{(t^2 + 1) \cdot 2 - (1 + 2t) 2t}{(t^2 + 1)^2} dt = \frac{-2t^2 - 2t + 2}{(t^2 + 1)^2} dt,$$

$$\begin{aligned} (1 + x) \sqrt{1 + x - x^2} &= \left(1 + \frac{1 + 2t}{t^2 + 1}\right) \left(\frac{1 + 2t}{t^2 + 1} t - 1\right) = \\ &= \frac{t^2 + 2t + 2}{t^2 + 1} \cdot \frac{t^2 + t - 1}{t^2 + 1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1 + x) \sqrt{1 + x - x^2}} &= - \int \frac{(t^2 + 1)^2 2(t^2 + t - 1) dt}{(t^2 + 2t + 2)(t^2 + t - 1)(t^2 + 1)^2} = \\ &= -2 \int \frac{dt}{(t + 1)^2 + 1} = -2 \operatorname{arctg} (t + 1) + C = \\ &= -2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 + x - x^2} + x + 1}{x} + C. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Интеграл в задаче 235 берется гораздо проще подстановкой

$$1 + x = \frac{1}{z}.$$

Убедитесь в этом сами.

236. Найти интеграл:

$$\int \frac{(x+1) dx}{(x^2+2x) \sqrt{x^2+2x}}.$$

Р е ш е н и е. Квадратный трехчлен имеет здесь два различных вещественных корня: $\lambda = 0$, $\mu = -2$, так как $x^2 + 2x = x(x+2)$. Поэтому применяем третью подстановку Эйлера:

$$\sqrt{x^2+2x} = xt.$$

После возведения в квадрат и сокращения на x , получим:

$$x^2 + 2x = x^2 t^2, \quad 2 = x(t^2 - 1), \quad x = \frac{2}{t^2 - 1}.$$

Далее находим:

$$dx = -\frac{4t dt}{(t^2 - 1)^2}, \quad x + 1 = \frac{2}{t^2 - 1} + 1 = \frac{1 + t^2}{t^2 - 1},$$

$$(x^2 + 2x) \sqrt{x^2 + 2x} = x^2 t^2 \cdot xt = x^3 t^3 = \frac{8t^3}{(t^2 - 1)^3}.$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+1) dx}{(x^2+2x) \sqrt{x^2+2x}} &= -\int \frac{(t^2+1)(t^2-1)^3 4t dt}{(t^2-1) 8t^3 (t^2-1)^2} = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{t^2+1}{t^2} dt = -\frac{1}{2} \int dt - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2} t + \frac{1}{2t} + C = \\ &= -\frac{\sqrt{x^2+2x}}{2x} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+2x}} + C = \frac{-x^2 - 2x + x^2}{2x\sqrt{x^2+2x}} + C = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x^2+2x}} + C. \end{aligned}$$

В задачах 237—240 вычислите интегралы с помощью одной из подстановок Эйлера.

$$237. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$238. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}.$$

$$239. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$$

$$240. \int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}}.$$

§ 5. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

Предварительно изучите по учебнику Г. М. Фихтенгольца главу X, п° 159 (примеры 5, 8), 161 (примеры 3, 46), 171. Особенно внимательно изучите п° 171.

Рассмотрим сначала несколько задач, для решения которых не потребуются никаких дополнительных теоретических сведений, кроме тех, которые были даны в § 1 и 2 главы I.

241. Найти интеграл:

$$\int \sqrt{1 - \sin 2x} \, dx.$$

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию, используя равенства

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

Получим:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - \sin 2x} \, dx &= \int \sqrt{\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x} \, dx = \\ &= \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} \, dx = \int |\sin x - \cos x| \, dx. \end{aligned}$$

Было бы грубой ошибкой здесь принять, что $\sqrt{(\sin x - \cos x)^2} = \sin x - \cos x$. Это было бы верно лишь при $\sin x - \cos x > 0$, в то время как при $\sin x - \cos x < 0$ должно быть $\sqrt{(\sin x - \cos x)^2} = -(\sin x - \cos x)$.

По определению абсолютной величины имеем:

$$|\sin x - \cos x| = \begin{cases} \sin x - \cos x & \text{при } \sin x - \cos x \geq 0, \\ \cos x - \sin x & \text{при } \sin x - \cos x < 0. \end{cases}$$

Итак, окончательно имеем:

$$\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx =$$

$$= \begin{cases} \int \sin x dx - \int \cos x dx = -(\cos x + \sin x) + C \\ \text{при } \sin x - \cos x \geq 0, \\ \int \cos x dx - \int \sin x dx = \sin x + \cos x + C \\ \text{при } \sin x - \cos x < 0. \end{cases}$$

242. Найти интеграл:

$$\int \frac{\cos^2 x}{1 + 4 \cos^2 x} \cdot \sin x dx.$$

Решение. Если множитель $\sin x$ подвести под знак дифференциала (см. формулу 7 из табл. 2), то сразу напрашивается подстановка $\cos x = t$. Отсюда $-\sin x dx = dt$, и мы получаем:

$$\int \frac{\cos^2 x}{1 + 4 \cos^2 x} \cdot \sin x dx = - \int \frac{t^2}{1 + 4t^2} dt =$$

$$= - \frac{1}{4} \int \frac{4t^2 + 1 - 1}{1 + 4t^2} dt^*) = - \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{1}{1 + 4t^2} \right) dt =$$

$$= - \frac{1}{4} \int dt + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{1 + (2t)^2} = - \frac{1}{4} t + \frac{1}{8} \int \frac{d(2t)}{1 + (2t)^2} =$$

$$= - \frac{1}{4} t + \frac{1}{8} \operatorname{arctg} 2t + C =$$

$$= - \frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{8} \operatorname{arctg} (2 \cos x) + C.$$

243. Найти интеграл:

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx.$$

Решение. Множитель $\sin x \cos x dx$ наводит нас на мысль выбрать подстановку

$$\sin^2 x = t.$$

В этом случае имеем:

$$2 \sin x \cos x dx = dt, \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} dt, \sin^4 x = t^2,$$

*) Мы здесь исключили целую часть из подынтегральной дроби; см. решение задачи 4.

$$\int \frac{\sin x \cos x dx}{1 + \sin^4 x} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \\ = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} (\sin^2 x) + C.$$

Рассмотрим теперь интегралы вида

$$\int \sin mx \cos nx dx, \quad (1)$$

$$\int \sin mx \sin nx dx, \quad (2)$$

$$\int \cos mx \cos nx dx, \quad (3)$$

считая, что m и n — целые положительные числа. Эти интегралы берутся с помощью следующих известных из тригонометрии преобразований:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin (m - n) x + \sin (m + n) x], \quad (4)$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos (m - n) x - \cos (m + n) x], \quad (5)$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos (m - n) x + \cos (m + n) x]. \quad (6)$$

244. Найти интеграл:

$$\int \sin 5x \sin 3x dx.$$

Решение. Воспользовавшись формулой (5), а затем формулой 5 из таблицы 1, получим:

$$\int \sin 5x \sin 3x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 8x) dx = \\ = \frac{1}{2} \int \cos 2x dx - \frac{1}{2} \int \cos 8x dx = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C.$$

245. Найти интеграл:

$$\int \sin x \cos 7x dx.$$

Решение. На основании формулы (4) и формулы 6 из таблицы 1 имеем:

$$\int \sin x \cos 7x dx = \frac{1}{2} \int [\sin (-6x) + \sin 8x] dx =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \int \sin 6x \, dx + \frac{1}{2} \int \sin 8x \, dx = \\
&= \frac{1}{12} \cos 6x - \frac{1}{16} \cos 8x + C.
\end{aligned}$$

246. Найти интеграл:

$$\int \cos x \cos 2x \cos 5x \, dx.$$

Решение. По формуле (6) получим последовательно:

$$\begin{aligned}
(\cos x \cos 2x) \cos 5x &= \frac{1}{2} [\cos (-x) + \cos 3x] \cos 5x = \\
&= \frac{1}{2} \cos x \cos 5x + \frac{1}{2} \cos 3x \cos 5x = \frac{1}{4} [\cos (-4x) + \\
&+ \cos 6x] + \frac{1}{4} [\cos (-2x) + \cos 8x] = \frac{1}{4} \cos 2x + \\
&+ \frac{1}{4} \cos 4x + \frac{1}{4} \cos 6x + \frac{1}{4} \cos 8x.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\int \cos x \cos 2x \cos 5x \, dx &= \frac{1}{4} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{4} \int \cos 4x \, dx + \\
&+ \frac{1}{4} \int \cos 6x \, dx + \frac{1}{4} \int \cos 8x \, dx = \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 4x + \\
&+ \frac{1}{24} \sin 6x + \frac{1}{32} \sin 8x + C.
\end{aligned}$$

247. Найдем теперь в общем виде интегралы (1) — (3) с помощью формул (4) — (6).

На основании формулы (4) находим:

$$\begin{aligned}
&\int \sin mx \cos nx \, dx = \\
&= \frac{1}{2} \int \sin (m-n)x \, dx + \frac{1}{2} \int \sin (m+n)x \, dx = \\
&= -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos (m-n)x}{m-n} + \frac{\cos (m+n)x}{m+n} \right] + C \text{ при } m \neq n. \quad (7)
\end{aligned}$$

Если же $m = n$, то формула (4) принимает вид:

$$\sin nx \cos nx = \frac{1}{2} \sin 2nx;$$

поэтому

$$\int \sin nx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int \sin 2nx \, dx = -\frac{1}{2} \frac{\cos 2nx}{2n} + C. \quad (8)$$

Пользуясь формулой (5), получим:

$$\begin{aligned} \int \sin mx \sin nx \, dx &= \\ &= \frac{1}{2} \int \cos (m-n) x \, dx - \frac{1}{2} \int \cos (m+n) x \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (m-n) x}{m-n} - \frac{\sin (m+n) x}{m+n} \right] + C \text{ при } m \neq n. \end{aligned} \quad (9)$$

Если же $m = n$, то формула (5) принимает вид:

$$\sin^2 nx = \frac{1}{2} [1 - \cos 2nx];$$

поэтому

$$\begin{aligned} \int \sin^2 nx \, dx &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2nx \, dx = \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \frac{\sin 2nx}{2n} + C. \end{aligned} \quad (10)$$

На основании формулы (6) находим:

$$\begin{aligned} \int \cos mx \cos nx \, dx &= \\ &= \frac{1}{2} \int \cos (m-n) x \, dx + \frac{1}{2} \int \cos (m+n) x \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (m-n) x}{m-n} + \frac{\sin (m+n) x}{m+n} \right] + C \text{ при } m \neq n. \end{aligned} \quad (11)$$

Если же $m = n$, то формула (6) принимает вид:

$$\cos^2 nx = \frac{1}{2} [1 + \cos 2nx];$$

поэтому

$$\begin{aligned} \int \cos^2 nx \, dx &= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2nx \, dx = \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \frac{\sin 2nx}{2n} + C. \end{aligned} \quad (12)$$

Формулы (7) — (12) нам пригодятся в дальнейшем. Поэтому для удобства пользования соберем их вместе:

$$\left. \begin{aligned} \int \sin mx \cos nx \, dx &= \begin{cases} -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos (m-n)x}{m-n} + \frac{\cos (m+n)x}{m+n} \right] + C & \text{при } m \neq n, \\ -\frac{1}{2} \frac{\cos 2nx}{2n} + C & \text{при } m = n; \end{cases} \\ \int \sin mx \sin nx \, dx &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (m-n)x}{m-n} - \frac{\sin (m+n)x}{m+n} \right] + C & \text{при } m \neq n, \\ \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin 2nx}{2n} \right] + C & \text{при } m = n; \end{cases} \\ \int \cos mx \cos nx \, dx &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (m-n)x}{m-n} + \frac{\sin (m+n)x}{m+n} \right] + C & \text{при } m \neq n, \\ \frac{1}{2} \left[x + \frac{\sin 2nx}{2n} \right] + C & \text{при } m = n. \end{cases} \end{aligned} \right\} (13)$$

Интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x) \, dx,$$

где $R(\sin x, \cos x)$ — рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, преобразуются в интегралы от рациональной функции подстановкой

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \quad (-\pi < x < \pi). \quad (14)$$

Для этого с помощью равенства (14) выражаем $\sin x$, $\cos x$, x через t , а также dx через t и dt :

$$\left. \begin{aligned} \sin x &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \\ \frac{x}{2} &= \operatorname{arctg} t, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2 \, dt}{1 + t^2}. \end{aligned} \right\} (15)$$

Подстановка (14) называется *универсальной*. Она применяется, например, при вычислении интегралов вида

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x + c \sin x},$$

которые с помощью этой подстановки $\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \right)$ приводятся к интегралам вида

$$\int \frac{dt}{At^2 + Bt + C},$$

подробно рассмотренным нами в § 4 главы I.

Рассмотрим несколько задач, при решении которых применяется универсальная подстановка.

248. Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

Решение. Применяем подстановку $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. На основании формул (15) имеем:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2(1+t^2)dt}{(1+t^2)2t} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Чтобы обойтись без предварительного запоминания формул (15), рекомендуем поступать так: сначала воспользоваться более простой формулой

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

затем разделить числитель и знаменатель на $\cos^2 \frac{x}{2}$, подвести под дифференциал множитель $\frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}$ по формуле

8 из таблицы 2 и только после этого применить подстановку $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{d \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{d \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \int \frac{dt}{t} = \\ &= \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

Покажем еще один способ отыскания интеграла задачи 248. Имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx = \\ &= \int \operatorname{tg} \frac{x}{2} d \frac{x}{2} + \int \operatorname{ctg} \frac{x}{2} d \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались тождеством $1 = \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}$, разделили почленно числитель на знаменатель и подвели множитель $\frac{1}{2}$ под дифференциал. Используя теперь решение задачи 9 и ответ к задаче 42, получим:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| - \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

249. Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{\cos x}.$$

Решение. Так как

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{и} \quad dx = d \left(x + \frac{\pi}{2} \right),$$

то, применяя подстановку $x + \frac{\pi}{2} = y$, получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{d \left(x + \frac{\pi}{2} \right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)} = \int \frac{dy}{\sin y} = (\text{см. задачу 248}) = \\ &= \ln \left| \operatorname{tg} \frac{y}{2} \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C. \end{aligned}$$

250. Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{3 + \sin 2x}.$$

Решение. Воспользуемся тем, что

$$3 = 3 (\sin^2 x + \cos^2 x), \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

затем разделим числитель и знаменатель на $\cos^2 x$ и возьмем подстановку

$$\operatorname{tg} x = t, \quad \text{откуда} \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = dt.$$

Получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 + \sin 2x} &= \int \frac{dx}{3 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x} = \\ &= \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{3 \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x + 3} = \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 3}. \end{aligned}$$

Далее приводим квадратный трехчлен к каноническому виду и берем интеграл (см. § 4, гл. I):

$$3t^2 + 2t + 3 = \frac{1}{3} (9t^2 + 6t + 1 + 8) = \frac{1}{3} [(3t + 1)^2 + 8],$$

$$\int \frac{dx}{3 + \sin 2x} = \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 3} = \int \frac{3 dt}{(3t + 1)^2 + 8} = \int \frac{d(3t + 1)}{(3t + 1)^2 + 8} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}} \operatorname{arctg} \frac{3t + 1}{\sqrt{8}} + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} x + 1}{2\sqrt{2}} + C.$$

251. Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x}.$$

Решение. Воспользуемся тем, что

$$3 = 3 \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right), \quad \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2};$$

разделим затем числитель и знаменатель на $\cos^2 \frac{x}{2}$ и воспользуемся подстановкой

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad \text{откуда} \quad \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = dt.$$

Получим:

$$\int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x} = \int \frac{dx}{2 \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \cos^2 \frac{x}{2} \right)} =$$

$$= \int \frac{\frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2} = \int \frac{dt}{t^2 + t + 2} = \int \frac{4 dt}{(2t + 1)^2 + 7} =$$

$$= 2 \int \frac{d(2t + 1)}{(2t + 1)^2 + 7} = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2t + 1}{\sqrt{7}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{7}} + C.$$

Универсальная подстановка часто приводит к сложным выкладкам, поэтому ее следует применять лишь в тех случаях, когда невозможно найти более легкий способ вычисления интеграла. Рассмотрим несколько видов интегралов от тригонометрических функций, которые можно взять проще с помощью других подстановок.

К интегралам вида

$$\int \frac{dx}{a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x} \text{ и } \int \frac{(M \operatorname{tg} x + N) dx}{a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x}$$

применяется подстановка

$$\operatorname{tg} x = t,$$

с помощью которой они приводятся к интегралам вида

$$\int \frac{dt}{at^2 + bt + c} \text{ и } \int \frac{Mt + N}{at^2 + bt + c} dt$$

(см. учебник, § 4, гл. I). Рассмотрим соответствующие задачи.

252. Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{3 \cos^2 x + 4 \sin^2 x}.$$

Решение. Применяем подстановку

$$\operatorname{tg} x = t.$$

Затем делим числитель и знаменатель на $\cos^2 x$ и вводим под знак дифференциала множитель $\frac{1}{\cos^2 x}$ (см. формулу

7 из табл. 1). Мы получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 \cos^2 x + 4 \sin^2 x} &= \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{3 + 4 \operatorname{tg}^2 x} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{3 + 4 \operatorname{tg}^2 x} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d 2t}{3 + (2t)^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

(См. решение задачи 7.)

253. Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{4 \sin^2 x - 3 \cos^2 x}.$$

Решение. Поступаем аналогично решению задачи 252:

$$\int \frac{dx}{4 \sin^2 x - 3 \cos^2 x} = \frac{1}{2} \int \frac{d \, 2 \operatorname{tg} x}{(2 \operatorname{tg} x)^2 - 3} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - 3} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{3}}{t + \sqrt{3}} \right| + C = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} x - \sqrt{3}}{2 \operatorname{tg} x + \sqrt{3}} \right| + C.$$

Мы здесь взяли подстановку $2 \operatorname{tg} x = t$ и воспользовались формулой 12 из таблицы 1.

254. Найти интеграл:

$$\int \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx.$$

Решение. Поступая аналогично решению задачи 252, мы и здесь устанавливаем полезность подстановки

$$\operatorname{tg} x = t.$$

В самом деле, имеем:

$$\int \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx = \int \frac{(2 \operatorname{tg} x + 3) \frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 2} =$$

$$= \int \frac{2t + 3}{t^2 + 2} dt = \int \frac{2t dt}{t^2 + 2} + 3 \int \frac{dt}{t^2 + 2} \quad *) =$$

$$= \ln(t^2 + 2) + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \ln(\operatorname{tg}^2 x + 2) + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C.$$

Подстановка $\operatorname{tg} x = t$ применяется также к интегралам вида**)

$$\int \frac{\sin^n x}{\cos^{n+2} x} dx, \quad n — \text{целое положительное число.}$$

255. Найти интеграл:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx.$$

Решение. Перепишем данный интеграл в виде

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^3 x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

*) Здесь в первом интеграле числитель равен производной знаменателя (см. решение задачи 9); второй интеграл — табличный (см. формулу 9 из табл. 1).

**) Аналогично подстановка $\operatorname{ctg} x = t$ применяется к интегралам

$$\int \frac{\cos^n x}{\sin^{n+2} x} dx.$$

Применяем подстановку

$$\operatorname{tg} x = t, \text{ откуда } \frac{dx}{\cos^2 x} = dt.$$

Имеем:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + C.$$

Рассмотрим теперь интегралы вида

$$\int \cos^n x dx \quad \text{и} \quad \int \sin^n x dx,$$

где n — целое положительное число. Рассмотрим сначала случай, когда n — нечетное число.

256. Найти интеграл:

$$\int \cos^3 x dx.$$

Решение. Отделяем множитель $\cos x$ и подводим его под знак дифференциала, а оставшийся множитель $\cos^2 x$ заменяем по формуле $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Затем применяем подстановку

$$\sin x = t, \text{ откуда } \cos x dx = dt.$$

В результате будем иметь:

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) d \sin x = \\ &= \int (1 - t^2) dt = \int dt - \int t^2 dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \\ &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

257. Найти интеграл:

$$\int \sin^5 x dx.$$

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x dx &= \int \sin^4 x \cdot \sin x dx = - \int (1 - \cos^2 x)^2 d \cos x = \\ &= - \int (1 - t^2)^2 dt = - \int dt + 2 \int t^2 dt - \int t^4 dt = \end{aligned}$$

$$= -t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

Мы здесь подвели под знак дифференциала множитель $\sin x$ и применили подстановку $\cos x = t$.

Рассмотрим теперь случай, когда n — четное число.

258. Найти интегралы:

$$\int \sin^2 x \, dx, \quad \int \cos^2 x \, dx.$$

Решение. Воспользуемся формулами

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Заданные интегралы примут вид:

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C,$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

259. Найти интеграл:

$$\int \cos^6 x \, dx.$$

Решение. Воспользовавшись формулой

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

получим:

$$\int \cos^6 x \, dx = \int (\cos^2 x)^3 \, dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^3 \, dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int (1 + 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x + \cos^3 2x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int dx + \frac{3}{8} \int \cos 2x \, dx + \frac{3}{8} \int \cos^2 2x \, dx +$$

$$+ \frac{1}{8} \int \cos^3 2x \, dx.$$

Здесь первый и второй интегралы берутся непосредственно

$$\frac{1}{8} \int dx = \frac{1}{8} x, \quad \frac{3}{8} \int \cos 2x dx = \frac{3}{16} \sin 2x.$$

Рассмотрим подробнее третий и четвертый интегралы. В третьем интеграле, воспользовавшись еще раз указанной формулой, будем иметь:

$$\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{3}{8} \int \cos^2 2x dx &= \frac{3}{8} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \\ &= \frac{3}{16} \int dx + \frac{3}{16} \int \cos 4x dx = \frac{3}{16} x + \frac{3}{64} \sin 4x. \end{aligned}$$

С четвертым интегралом поступаем, как в случае нечетного показателя степени. Получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \int \cos^3 2x dx &= \frac{1}{8} \int \cos^2 2x \cdot \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{16} \int (1 - \sin^2 2x) d \sin 2x = \frac{1}{16} \int (1 - t^2) dt = \\ &= \frac{1}{16} t - \frac{1}{48} t^3 = \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{1}{48} \sin^3 2x. \end{aligned}$$

Мы подвели здесь $\cos 2x$ под знак дифференциала

$$\cos 2x dx = \frac{1}{2} d \sin 2x$$

и затем применили подстановку

$$\sin 2x = t.$$

Окончательно получим:

$$\begin{aligned} \int \cos^6 x dx &= \frac{1}{8} x + \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3}{16} x + \frac{3}{64} \sin 4x + \\ &+ \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C = \frac{5}{16} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \\ &+ \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C. \end{aligned}$$

Интегралы вида

$$\int \sin^n x dx \quad \text{и} \quad \int \cos^n x dx \quad (n \text{—целое})$$

можно вычислить и иным путем. Покажем это и выведем для них так называемые формулы приведения, которые пригодятся читателю значительно позднее.

Итак, пусть дан интеграл

$$I_n = \int \cos^n x \, dx \quad (n — \text{целое}).$$

Примем пока, что $n \neq -1$ и $n \neq 0$. Имеем:

$$\begin{aligned} \cos^n x &= \cos^{n-2} x \cos^2 x = \cos^{n-2} x (1 - \sin^2 x) = \\ &= \cos^{n-2} x - \cos^{n-2} x \sin^2 x, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} I_n &= \int \cos^n x \, dx = \int \cos^{n-2} x \, dx - \int \cos^{n-2} x \sin^2 x \, dx = \\ &= I_{n-2} - \int \cos^{n-2} x \sin^2 x \, dx. \end{aligned} \quad (16)$$

Второй интеграл правой части возьмем по частям, положив в нем

$$\begin{aligned} u &= \sin x, \\ dv &= \cos^{n-2} x \cdot \sin x \, dx, \end{aligned} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} du = \cos x \, dx, \\ v = - \int \cos^{n-2} x \, d \cos x = \\ = - \frac{\cos^{n-1} x}{n-1}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \cos^{n-2} x \sin^2 x \, dx &= - \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1} + \frac{1}{n-1} \int \cos^n x \, dx = \\ &= - \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1} + \frac{1}{n-1} I_n. \end{aligned}$$

Подставив этот результат в равенство (16), получим:

$$I_n = I_{n-2} + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1} - \frac{1}{n-1} I_n,$$

откуда после приведения подобных членов будем иметь:

$$\left(1 + \frac{1}{n-1} \right) I_n = I_{n-2} + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1}.$$

Итак, окончательно получаем:

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx \quad (17)$$

в предположении, что $n \neq 0$.

Заметим, что формулой (17) полезно пользоваться при n положительных ($n > 0$).

Применение формулы приведения (17) дает возможность значительно быстрее получить ответ. Решим с ее помощью задачу 259. Имеем:

$$\int \cos^6 x \, dx = \frac{\sin x \cos^5 x}{6} + \frac{5}{6} \int \cos^4 x \, dx,$$

$$\int \cos^4 x \, dx = \frac{\sin x \cos^3 x}{4} + \frac{3}{4} \int \cos^2 x \, dx,$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2} x,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \int \cos^6 x \, dx = & \frac{1}{6} \sin x \cos^5 x + \frac{5}{6 \cdot 4} \sin x \cos^3 x + \\ & + \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 4 \cdot 2} \sin x \cos x + \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 4 \cdot 2} x + C. \end{aligned}$$

Формулу приведения для n отрицательных ($n < 0$) мы легко выведем из равенства (17), если перепишем его в виде

$$I_{n-2} = \frac{n}{n-1} I_n - \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1}$$

и положим в нем

$$n-2 = -k.$$

Тогда получим:

$$I_{-k} = \frac{\sin x \cos^{1-k} x}{k-1} + \frac{k-2}{k-1} I_{-k+2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\cos^k x} = \frac{\sin x}{(k-1) \cos^{k-1} x} + \frac{k-2}{k-1} \int \frac{dx}{\cos^{k-2} x} \quad (k \neq 1). \quad (18)$$

Для $k = 1$ смотрите решение задачи 249.

260. Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x}.$$

Решение. По формуле (18) имеем:

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

(см. решение задачи 249).

Предлагаем читателю совершенно аналогично вывести самостоятельно следующие формулы приведения:

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx \quad (n \neq 0), \quad (19)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^k x} = -\frac{\cos x}{(k-1) \sin^{k-1} x} + \frac{k-2}{k-1} \int \frac{dx}{\sin^{k-2} x} \quad (k \neq 1). \quad (20)$$

См. также решение задачи 414.

Интегралы вида

$$\int \sin^m x \cos^n x dx, \quad (21)$$

где по крайней мере одно из чисел m, n — нечетное, берутся следующим образом.

261. Найти интеграл:

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx.$$

Решение. Мы имеем здесь нечетную степень синуса. Поэтому применяем подстановку $\cos x = t$, и подводим под знак дифференциала множитель $\sin x$. Имеем:

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^2 x dx &= \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \sin x dx = \\ &= -\int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x d \cos x = -\int (1 - t^2) t^2 dt = \\ &= -\frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 + C = -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + C. \end{aligned}$$

262. Найти интеграл:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x dx.$$

Решение. Здесь мы подводим под знак дифференциала множитель $\cos x$ и применяем подстановку $\sin x = t$. Имеем:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^5 x dx &= \int \sin^2 x \cos^4 x \cdot \cos x dx = \\ &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 d \sin x = \int t^2 (1 - t^2)^2 dt = \\ &= \int t^2 dt - 2 \int t^4 dt + \int t^6 dt = \frac{1}{3} t^3 - \frac{2}{5} t^5 + \frac{1}{7} t^7 + C = \\ &= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x + C. \end{aligned}$$

Примечание. Если же m и n — оба четные, то для вычисления интеграла вида (21) удобно воспользоваться формулами, приведенными в решении задачи 258, а также формулой

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Рассмотрим, наконец, интегралы вида

$$\int \operatorname{tg}^n x \, dx \quad \text{и} \quad \int \operatorname{ctg}^n x \, dx,$$

где n — целое положительное.

При $n = 1$ мы имеем интегралы:

$$\int \operatorname{tg} x \, dx \quad \text{и} \quad \int \operatorname{ctg} x \, dx;$$

второй из них вычислен нами раньше (см. задачу 9), первый вычисляется аналогично. Поэтому положим, что $n > 1$. При вычислении интегралов указанного вида выделяют обычно множитель $\operatorname{tg}^2 x$ (или $\operatorname{ctg}^2 x$) и заменяют его по формуле

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \quad \left(\text{или} \quad \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right). \quad (22)$$

Читателю станет это яснее при разборе решений следующих задач.

263. Найти интегралы:

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx, \quad \int \operatorname{ctg}^2 x \, dx.$$

Решение. Воспользовавшись формулами (22), получим:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2 x \, dx &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \\ &= \operatorname{tg} x - x + C, \end{aligned}$$

$$\int \operatorname{ctg}^2 x \, dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C \quad (23)$$

(мы воспользовались здесь формулами 7 и 8 таблицы 1).

264. Найти интеграл:

$$\int \operatorname{ctg}^6 x \, dx.$$

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{ctg}^6 x \, dx &= \int \operatorname{ctg}^4 x \operatorname{ctg}^2 x \, dx = \int \operatorname{ctg}^4 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \\ &= \int \operatorname{ctg}^4 x \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \operatorname{ctg}^4 x \, dx. \end{aligned}$$

Теперь в первом полученном интеграле подводим множитель $\frac{1}{\sin^2 x}$ под знак дифференциала (см. формулу 9 таблицы 2), а во втором снова выделяем множитель $\operatorname{ctg}^2 x$. Мы получим:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{ctg}^6 x \, dx &= - \int \operatorname{ctg}^4 x \, d \operatorname{ctg} x - \int \operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 x \, dx = \\ &= - \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x - \int \operatorname{ctg}^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \\ &= - \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x + \int \operatorname{ctg}^2 x \, d \operatorname{ctg} x + \int \operatorname{ctg}^2 x \, dx = \\ &= - \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x + \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x - x + C\end{aligned}$$

(мы воспользовались здесь равенством (23).

265. Найти интеграл:

$$\int \operatorname{tg}^5 x \, dx.$$

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^5 x \, dx &= \int \operatorname{tg}^3 x \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \operatorname{tg}^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^3 x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \int \operatorname{tg}^3 x \, d \operatorname{tg} x - \\ &- \int \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \int \operatorname{tg} x \, d \operatorname{tg} x + \\ &+ \int \operatorname{tg} x \, dx = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln |\cos x| + C,\end{aligned}$$

так как

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x} = - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = - \ln |\cos x| + C.$$

В задачах 266—300 вычислить данные интегралы.

266. $\int (\sin^4 x - 4 \sin^3 x + 2 \sin x) \cos x \, dx.$

267. $\int \frac{1 + \sin 3x}{\cos^2 3x} \, dx.$

268. $\int \cos x \cos 3x \, dx.$

269. $\int \sin 7x \cos x \, dx.$

270. $\int \cos 3x \cos 4x \, dx.$

$$271. \int \sin 3x \sin 4x dx. \quad 272. \int \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$$

$$273. \int \frac{dx}{1 + \cos x}. \quad 274. \int \frac{dx}{1 - \cos x}.$$

У к а з а н и е. В задачах 273 и 274 воспользуйтесь формулами.

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}, \quad 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

$$275. \int \frac{dx}{2 + \sin x}. \quad 276. \int \frac{dx}{5 + \sin x + 3 \cos x}.$$

$$277. \int \frac{dx}{2 \cos^2 x + \sin^2 x}. \quad 278. \int \frac{dx}{2 \sin^2 x - \cos^2 x}.$$

$$279. \int \frac{dx}{4 - 2 \cos^2 x}. \quad 280. \int \frac{dx}{1 + \sin 2x}.$$

$$281. \int \frac{dx}{\sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x}.$$

$$282. \int \frac{(\operatorname{tg} x - 3) dx}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x}. \quad 283. \int \frac{(1 - \operatorname{ctg} x) dx}{2 \sin^2 x + \cos^2 x}.$$

$$284. \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^4 x}. \quad 285. \int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^4 x}.$$

У к а з а н и е. В задачах 275 и 276 примените подстановку $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$,

а в задачах 277—283—подстановку $\operatorname{tg} x = t$. В задачах 275, 276, 279, 280 свободные члены в знаменателях предварительно умножьте на тригонометрическую единицу $\sin^2 x + \cos^2 x$. Задачи 284 и 285 решаются так же, как задача 255.

$$286. \int (\cos \varphi - \sin \varphi)^2 d\varphi. \quad 287. \int \sin^2 ax dx.$$

$$288. \int \cos^2 ax dx. \quad 289. \int (\cos x + \sin x)^3 dx.$$

$$290. \int \cos^5 x dx. \quad 291. \int \sin^3 x dx.$$

$$292. \int \sin^6 x dx. \quad 293. \int \frac{dx}{\sin^3 x}. \quad 294. \int \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

$$295. \int \sin^7 x \cos^6 x dx. \quad 296. \int \cos^3 x \sin^8 x dx.$$

$$297. \int \operatorname{tg}^3 x dx. \quad 298. \int \operatorname{ctg}^4 x dx.$$

$$299. \int (\operatorname{tg}^2 z + \operatorname{tg}^4 z) dz. \quad 300. \int (\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t)^3 dt.$$

Дополнительные задачи к главе II

$$301. \int \frac{(2x^4 - x^2 + 1) dx}{x^3 - x}.$$

$$302. \int \frac{(1 - x) dx}{x(x + 1)^2}.$$

$$303. \int \frac{x^4 dx}{x^4 - 2x^2 + 1}.$$

$$304. \int \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}.$$

$$305. \int \frac{(2x + 2) dx}{(x - 1)(x^2 + 1)^2}.$$

$$306. \int \frac{dx}{x(x^2 + 5)}.$$

$$307. \int \frac{dx}{(x + 1)^2(x^2 + 1)}.$$

$$308. \int \frac{(1 + \sqrt{x}) dx}{\sqrt[6]{x^5} + x \sqrt[6]{x}}.$$

$$309. \int \frac{1 - \sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}} dx.$$

$$310. \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}.$$

$$311. \int \frac{x + 3}{x^2 \sqrt{2x + 3}} dx.$$

$$312. \int x^3 (1 + 2x^2)^{-\frac{3}{2}} dx.$$

$$313. \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} dx}{\sin x \cos x}.$$

$$314. \int \cos^4 3x \sin 3x dx.$$

$$315. \int \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx. \quad 316. \int \operatorname{tg}^3\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) dx.$$

$$317. \int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x - 5}. \quad 318. \int \frac{dx}{2 + 3 \cos^2 x}.$$

$$319. \int \frac{dx}{\cos^2 x + 2 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x}. \quad 320. \int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

ГЛАВА III

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

§ 1. Вычисление непосредственным суммированием

1. Вычисление с помощью интегральных сумм. Предварительно изучите по учебнику Г. М. Фихтенгольца главу XI, п° 176, 177, 180, 184. Обратите особое внимание на примеры, решенные в п° 184.

Способ вычисления определенных интегралов методом суммирования основан на понятии «интегральных сумм», подробно изложенном в п° п° 176, 184.

321. Вычислить интеграл:

$$\int_0^1 x dx.$$

Решение. В теоретическом курсе (п° 176) доказывается, что

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}),$$

где $f(x)$ — непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция, ξ_i — точка, произвольно выбранная внутри частичного сегмента $[x_{i-1}, x_i]$, а λ — максимальная из длин частичных сегментов.

Из определения определенного интеграла следует, что значение

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

не зависит ни от способа разбиения сегмента $[a, b]$ на частичные сегменты $[x_{i-1}, x_i]$, ни от выбора точки ξ_i

внутри каждого из частичных сегментов. Руководствуясь этим, разобьем сегмент $[0, 1]$ на n равных частей. Точками деления сегмента будут:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{n}, \quad x_2 = \frac{2}{n}, \quad x_3 = \frac{3}{n}, \dots, \quad x_{n-1} = \frac{n-1}{n},$$

$$x_n = \frac{n}{n} = 1.$$

Получим n частичных сегментов:

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right].$$

Длина каждого из частичных сегментов равна $\frac{1}{n}$. Заметим, что $n \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Выберем внутри каждого частичного сегмента наиболее удобное для вычисления положение точек ξ_i . Пусть это будут самые правые точки каждого частичного сегмента:

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{2}{n}, \quad \frac{3}{n}, \quad \dots, \quad \frac{n}{n} = 1.$$

Вычислим значение функции $f(\xi_i)$ в этих точках:

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{2}{n}, \quad \frac{3}{n}, \quad \dots, \quad \frac{n}{n} = 1.$$

Составим интегральную сумму:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{3}{n} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{n} = \\ &= \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \dots + \frac{n}{n} \right) \cdot \frac{1}{n} = \\ &= \frac{1}{n} (1 + 2 + 3 + \dots + n) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(1+n)n}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1+n}{2}. \end{aligned}$$

Вычислим предел интегральной суммы при $\lambda \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$):

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

Покажем, что и при другом выборе точек ξ_i результат будет тот же. В самом деле, пусть в качестве точек ξ_i взяты точки, являющиеся серединами частичных сегментов:

$$\frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}, \frac{5}{2n}, \dots, \frac{2n-1}{2n}.$$

Вычислим значения функции в этих точках:

$$\frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}, \frac{5}{2n}, \dots, \frac{2n-1}{2n}.$$

Составим интегральную сумму:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{3}{2n} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{n} = \\ &= \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{n} \left[1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) \right] = \\ &= \frac{[1 + (2n-1)] \cdot n}{2n \cdot n \cdot 2} = \frac{2n^2}{4n^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Вычислим предел полученной интегральной суммы при стремлении к нулю наибольшего из частичных сегментов:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Полученный предел является значением определенного интеграла.

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

322. Вычислить интеграл:

$$\int_0^1 x^2 dx.$$

Решение. Разобьем отрезок $[0, 1]$ на n равных частей точками $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{2}{n}$, ..., $x_n = \frac{n}{n} = 1$.

Получим n частичных сегментов:

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right].$$

Длина каждого частичного сегмента равна $\frac{1}{n}$. В качестве точек ξ_i выберем самые правые точки частичных сегментов:

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n}{n}.$$

Вычислим значения функции $f(\xi_i)$ в этих точках:

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \left(\frac{3}{n}\right)^2, \dots, \left(\frac{n}{n}\right)^2.$$

Составим интегральную сумму:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{3}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \\ &= \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Вычислим предел интегральной суммы при $\lambda \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$):

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом,

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

323. Вычислить интеграл:

$$\int_a^b x^m dx \quad (m \neq -1, a > 0, b > a).$$

Решение. Разобьем сегмент $[a, b]$ точками деления $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$

и потребуем, чтобы эти точки составляли геометрическую прогрессию

$$a, aq, aq^2, aq^3, \dots, aq^n = b.$$

Знаменатель прогрессии

$$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} > 1.$$

Длины частичных сегментов будут:

$$aq - a, aq^2 - aq, aq^3 - aq^2, \dots, aq^n - aq^{n-1},$$

или

$$a(q-1), aq(q-1), aq^2(q-1), \dots, aq^{n-1}(q-1).$$

В качестве точек ξ_i выберем самые правые точки частичных сегментов:

$$aq, aq^2, aq^3, \dots, aq^n.$$

Вычислим значения функции $f(x) = x^m$ в этих точках:

$$(aq)^m, (aq^2)^m, \dots, (aq^n)^m.$$

Составим интегральную сумму:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = (aq)^m a(q-1) + (aq^2)^m \cdot aq(q-1) + \\ &+ \dots + (aq^n)^m \cdot aq^{n-1}(q-1) = (q-1) a^{m+1} q^m (1 + q^{m+1} + \\ &+ \dots + q^{(n-1)(m+1)}) = a^{m+1} \cdot q^m \cdot (q-1) \cdot \frac{q^{(m+1)n} - 1}{q^{m+1} - 1} = \\ &= a^{m+1} \cdot q^m \cdot \frac{(q^{m+1})^n - 1}{q^m + q^{m-1} + \dots + 1} = \\ &= a^{m+1} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1} - 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m-1}{n}} + \dots + 1}. \end{aligned}$$

Вычислим предел интегральной суммы при $\lambda \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma &= \lim_{n \rightarrow \infty} a^{m+1} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}} \cdot \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1} - 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m-1}{n}} + \dots + 1} = \\ &= a^{m+1} \cdot \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1} - 1}{m+1} = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_a^b x^m dx = \frac{1}{m+1} (b^{m+1} - a^{m+1}).$$

324. Вычислить интеграл:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

Решение. Для удобства вычислений разобьем сегмент $[1, 2]$ точками $x_0 = 1, x_1, x_2, \dots, x_n = 2$ на n частичных сегментов так, чтобы точки деления составляли геометрическую прогрессию. Обозначим через q знаменатель прогрессии, тогда точки разбиения будут $1, q, q^2, \dots, q^n = 2$ и, следовательно,

$$q = \sqrt[n]{2} > 1.$$

Длины частичных сегментов будут:

$$q - 1, q^2 - q, q^3 - q^2, \dots, q^n - q^{n-1}.$$

В качестве точек ξ_i выберем самые правые точки $[x_{i-1}, x_i]$:

$$q, q^2, \dots, q^n = 2.$$

Вычислим значения функции $f(x) = \frac{1}{x}$ в этих точках:

$$\frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \frac{1}{q^3}, \dots, \frac{1}{q^n}.$$

Составим интегральную сумму:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \frac{1}{q} (q - 1) + \frac{1}{q^2} (q^2 - q) + \frac{1}{q^3} (q^3 - q^2) + \\ &+ \dots + \frac{1}{q^n} (q^n - q^{n-1}) = \frac{1}{q} (q - 1) + \frac{1}{q} (q - 1) + \\ &+ \frac{1}{q} (q - 1) + \dots + \frac{1}{q} (q - 1) = \frac{n}{q} (q - 1) = \frac{n (\sqrt[n]{2} - 1)}{\sqrt[n]{2}} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2^n}}. \end{aligned}$$

Вычислим предел интегральной суммы при $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} (2^n - 1)}{\frac{1}{2^n}}.$$

Заменим переменную под знаком предела, положив $\frac{1}{2^n} - 1 = t$, тогда $\frac{1}{2^n} = 1 + t$ и, следовательно, при $n \rightarrow \infty$ будет $t \rightarrow 0$. Так как $\frac{1}{n} \ln 2 = \ln(1 + t)$, откуда $n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + t)}$, то

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} (2^n - 1)}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot \ln 2}{(1 + t) \ln(1 + t)} = \ln 2,$$

поскольку $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1 + t)} = 1$ и $\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t) = 1$.

Таким образом,

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2.$$

325. Вычислить интеграл $\int_1^2 x^2 dx$, разбивая сегмент $[1, 2]$ на равные части.

326. Вычислить интеграл $\int_1^2 e^x dx$, разбивая сегмент $[1, 2]$ на равные части.

327. Вычислить интеграл $\int_3^5 \sqrt{x} dx$, разбивая сегмент $[3, 5]$ так, чтобы точки деления сегмента составляли геометрическую прогрессию.

328. Вычислить интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$, разбивая сегмент

[1, 2] так, чтобы точки деления сегмента составляли геометрическую прогрессию.

329. Вычислить $\int_a^b x^3 dx$, разбивая сегмент $[a, b]$

так, чтобы точки деления сегмента составляли геометрическую прогрессию.

330. Вычислить интеграл $\int_a^b \frac{dx}{x^3}$, разбивая сегмент

так, чтобы точки деления сегмента составляли геометрическую прогрессию.

2. Вычисление определенных интегралов из геометрических соображений. Предварительно изучите по учебнику Г. М. Фихтенгольца главу X, п° 156 и главу XI, п° 175.

Как известно из теоретического курса (п° 175), определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ численно равен площади криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 1), ограниченной сверху кривой $y = f(x)$, ординатами $x = a$ и $x = b$ и отрезком оси абсцисс.

331. Используя геометрические соображения, вычислить:

$$\int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

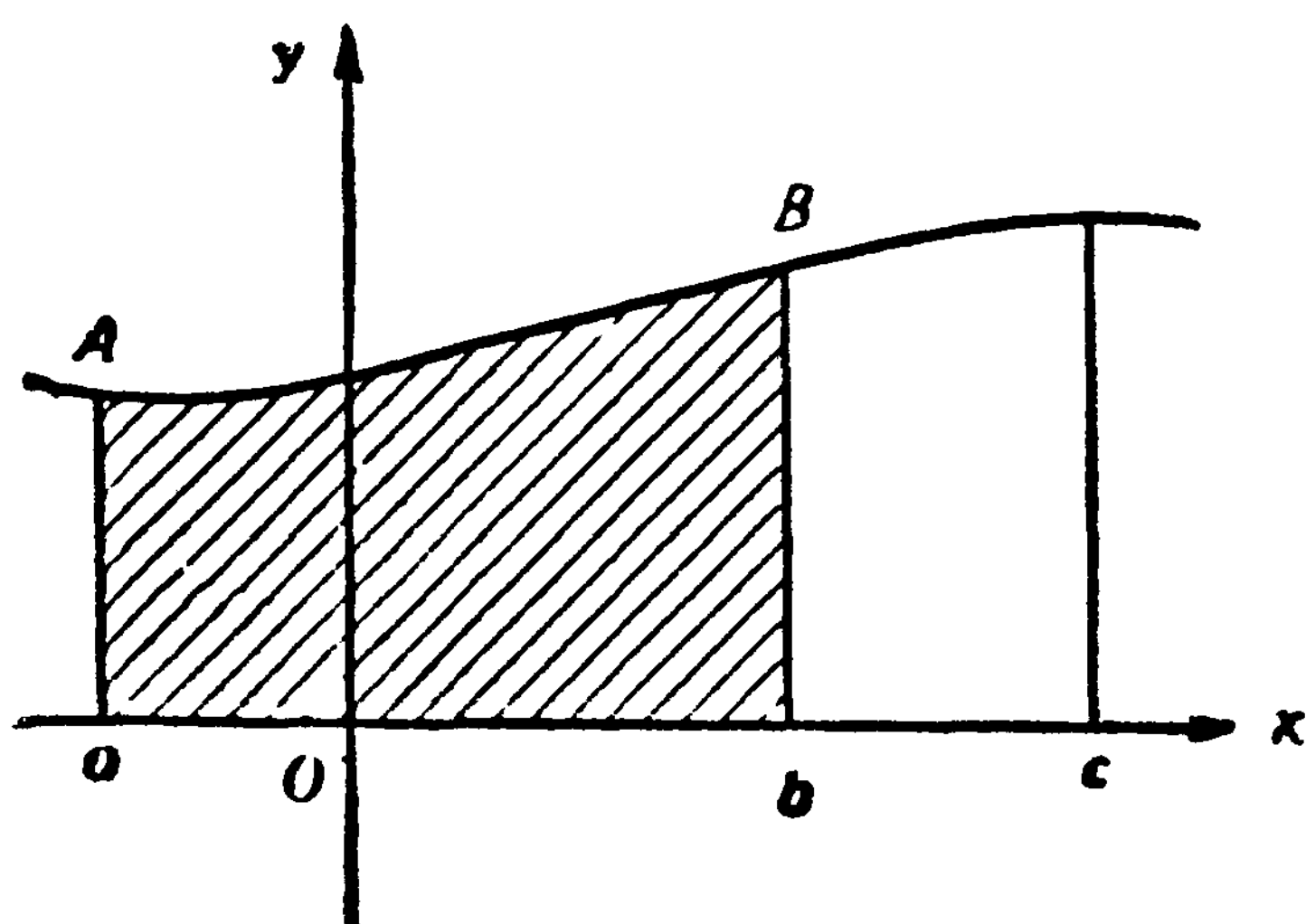


Рис. 1.

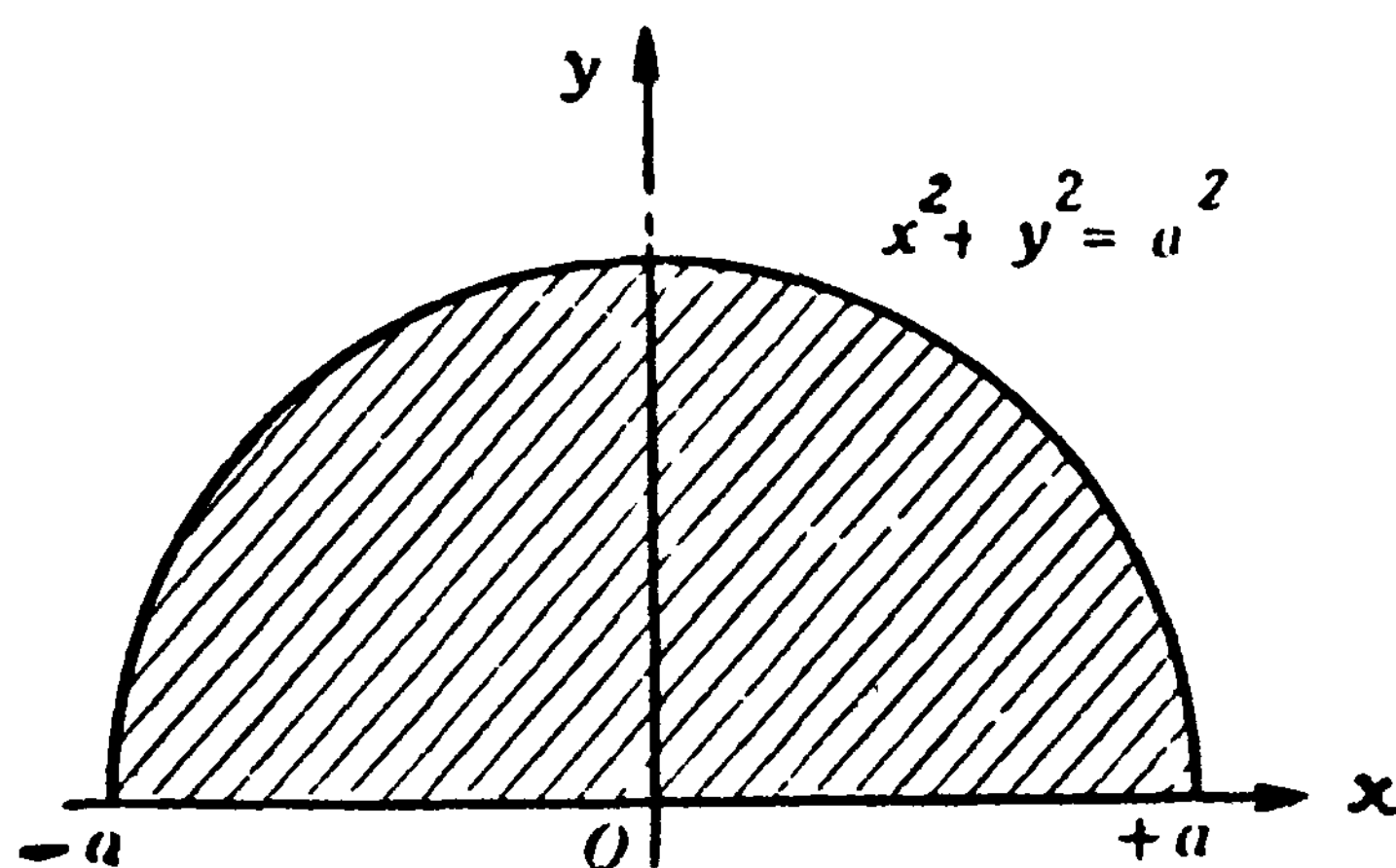


Рис. 2.

Решение. Обозначив подынтегральную функцию через y , получим:

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

это — окружность радиуса a с центром в начале координат (рис. 2). Подынтегральная функция представляет собой верхнюю половину этой окружности. Так как площадь круга равна πa^2 , то

$$\int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi a^2}{2}.$$

332. Используя геометрические соображения, вычислить:

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx.$$

Решение. Обозначим подынтегральную функцию через y . Кривая $y = \sin x$ изображена на рисунке 3. Разобьем

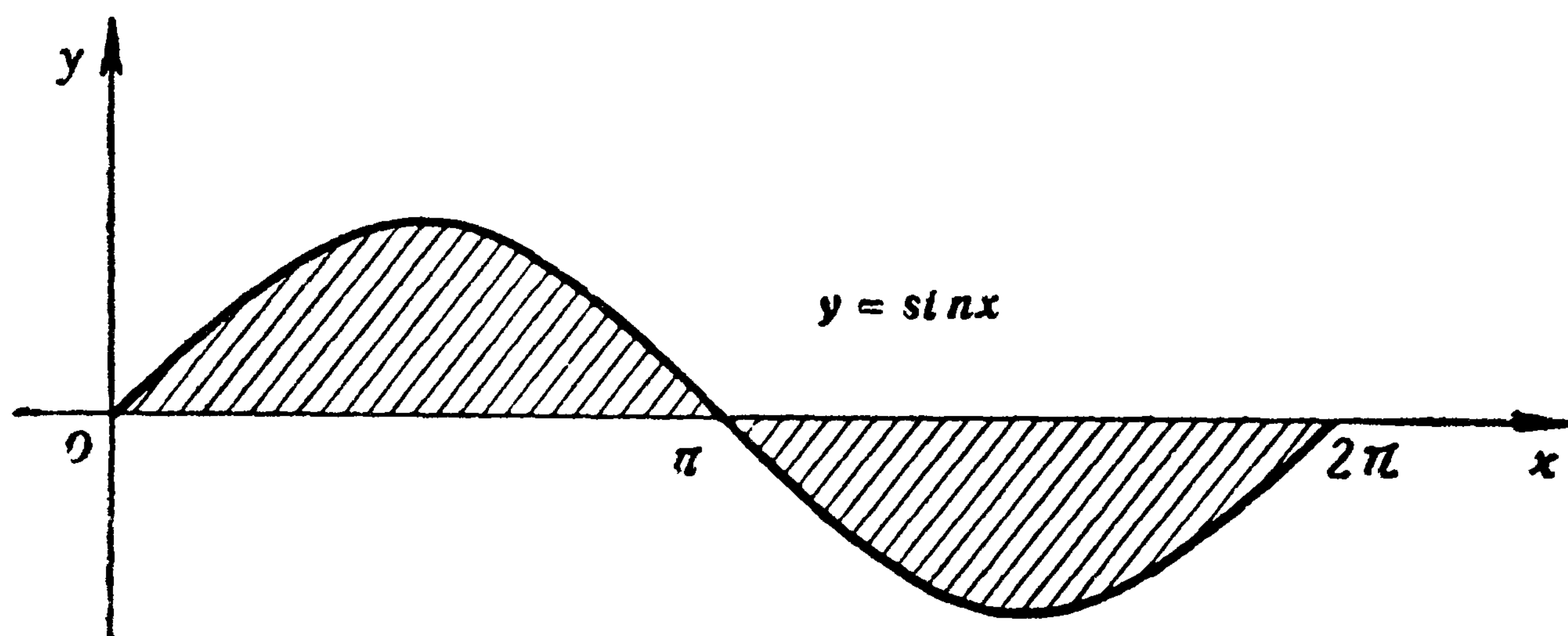


Рис. 3.

промежуток интегрирования $[0, 2\pi]$ на два сегмента $[0, \pi]$ и $[\pi, 2\pi]$. Из рисунка 3 видно, что кривая $y = \sin x$ расположена на сегменте $[0, \pi]$ над осью Ox , а на сегменте $[\pi, 2\pi]$ под осью Ox . Обозначим площади, образуемые данной кривой с осью Ox на этих участках, соответственно через S_1 и S_2 . Как видно из рисунка 3, численные значения этих площадей равны, но имеют противоположные знаки $|S_1| = |S_2|$. Отсюда следует, что

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = S_1 + (-S_2) = 0.$$

Используя геометрические соображения, вычислить следующие интегралы:

$$333. \int_0^1 dx.$$

$$334. \int_2^3 x dx.$$

$$335. \int_{-1}^0 (x+1) dx.$$

$$336. \int_{-2}^2 x^3 dx.$$

$$337. \int_{-1}^1 \frac{x dx}{1+x^4}.$$

$$338. \int_{-3}^3 \frac{5}{3} \sqrt{9-x^2} dx.$$

$$339. \int_0^{2\pi} \sin^3 x dx.$$

$$340. \int_0^{\pi} \cos^5 x dx.$$

3. Основные свойства определенных интегралов. Предварительно изучите по учебнику Г. М. Фихтенгольца главу XI, п° 180 — 183.

341. Оценить интеграл:

$$\int_0^1 \sqrt{9+x^2} dx.$$

Решение. Так как в данной задаче $0 \leq x \leq 1$, следовательно, $0 \leq x^2 \leq 1$, то для подынтегральной функции справедливы неравенства:

$$3 \leq \sqrt{9+x^2} \leq \sqrt{10}.$$

Воспользовавшись теперь свойством 8 определенного интеграла (см. учебник, п° 182), находим оценку заданного интеграла:

$$3(1-0) \leq \int_0^1 \sqrt{9+x^2} dx \leq \sqrt{10}(1-0),$$

или окончательно

$$3 \leq \int_0^1 \sqrt{9+x^2} dx \leq \sqrt{10}.$$

342. Оценить интеграл:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Решение. На заданном отрезке подынтегральная функция монотонно убывает. В самом деле, если $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, то всюду на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ производная $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} < 0$. По определению монотонно убывающей функции из неравенств $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ следуют неравенства

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) \geq f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{2}\right);$$

следовательно, по указанному выше свойству определенного интеграла

$$\frac{1 \cdot 4}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \geq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \geq \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

или

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{4 \cdot \pi}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot 4}},$$

откуда

$$\frac{1}{2} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

В задачах 343 — 346 оценить интегралы.

$$343. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx.$$

$$344. \int_1^e x^2 \ln x \, dx.$$

$$345. \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3}.$$

$$346. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}.$$

347. Найти среднее значение функции $f(x) = 5x + 2$ на отрезке $[-2, 2]$.

Решение. Средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется число

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

В данном случае

$$\mu = \frac{1}{2-(-2)} \int_{-2}^2 (5x+2) \, dx = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 (5x+2) \, dx.$$

Используя свойства 3 и 4 определенного интеграла (см. учебник, п°181), получим:

$$\int_{-2}^2 (5x+2) \, dx = 5 \int_{-2}^2 x \, dx + 2 \int_{-2}^2 dx.$$

Из геометрических соображений ясно, что $\int_{-2}^2 x \, dx = 0$,

а $\int_{-2}^2 dx = 4$ (см. рис. 4). Следовательно,

$$\mu = \frac{1}{4} (0 + 4) = 1.$$

348. Не вычисляя значений интегралов $\int_0^1 x \, dx$ и $\int_0^1 x^2 \, dx$,

установить, величина какого из них больше.

Решение. Как известно (п° 182), если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$, где $a < b$, и $f(x) \leq g(x)$ на этом сегменте, то $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

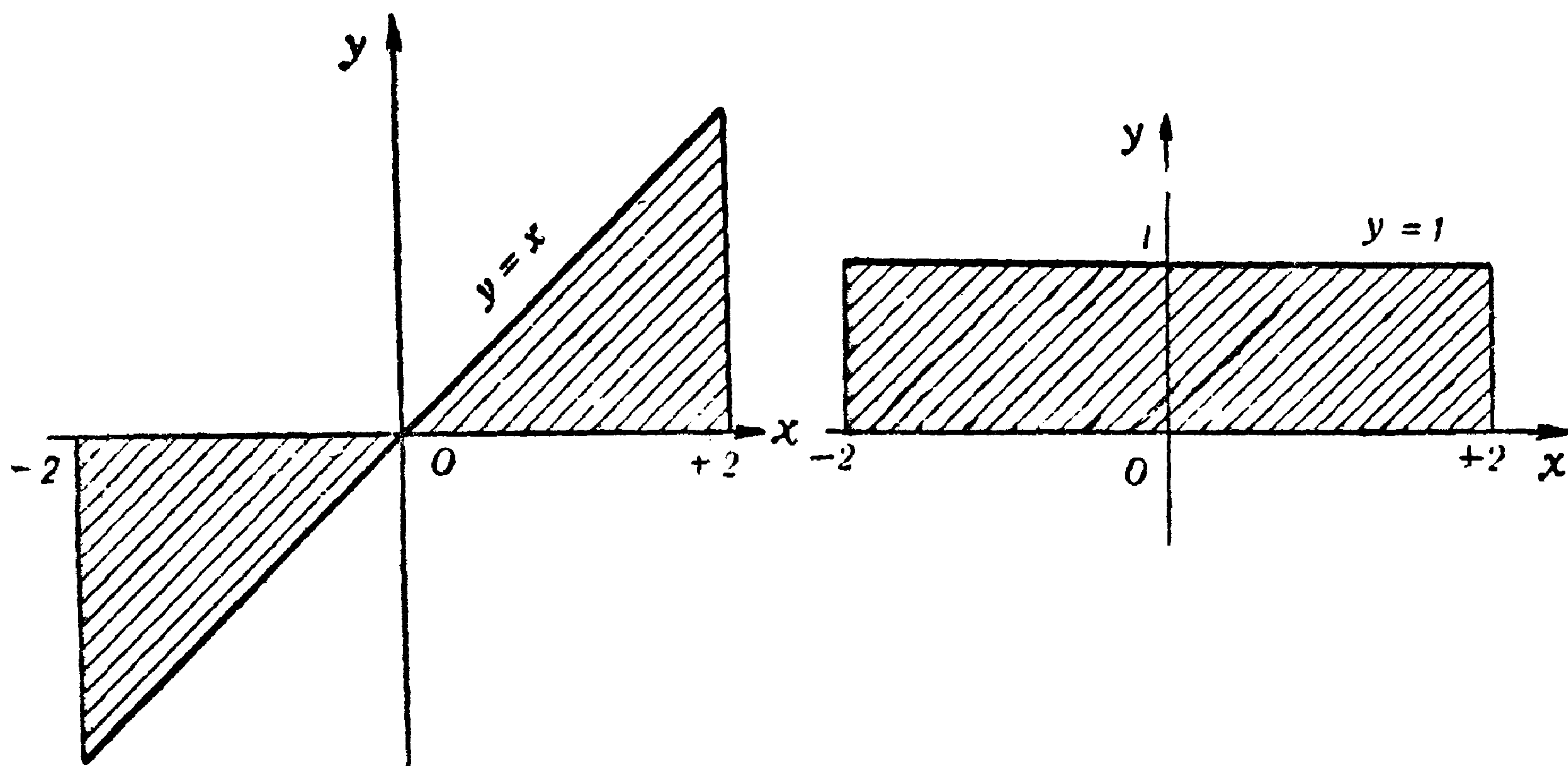


Рис. 4.

Обозначим через $f(x)$ подынтегральную функцию первого интеграла, т. е. $f(x) = x$, а через $g(x)$ подынтегральную функцию второго интеграла, т. е. $g(x) = x^2$. Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на сегменте $[0, 1]$, следовательно, и интегрируемы на нем, и $f(x) \geq g(x)$ (знак равенства реализуется на концах сегмента). Отсюда следует, что

$$\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx.$$

349. Доказать неравенство:

$$1 < \int_0^1 e^{x^2} dx < e.$$

Решение. Рассмотрим интегралы $\int_0^1 e^{x^2} dx$ и $\int_0^1 dx$. Обозначим через $f(x)$ и $g(x)$ соответствующие подынтеграль-

ные функции, т. е. $f(x) = e^{x^2}$ и $g(x) = 1$. Эти функции непрерывны на сегменте $[0, 1]$, причем $g(x) < f(x)$. Из геометрических соображений ясно, что $\int_0^1 dx = 1$, следовательно,

$$\int_0^1 dx = 1 < \int_0^1 e^{x^2} dx.$$

Левая часть неравенств доказана. Рассмотрим интегралы

$\int_0^1 e^{x^2} dx$ и $\int_0^1 e dx$. Обозначим подынтегральные функции этих

интегралов соответственно через $f(x) = e^{x^2}$ и $g(x) = e$. Эти функции непрерывны на сегменте $[0, 1]$, причем

$g(x) > f(x)$. Следовательно, $\int_0^1 e dx = e > \int_0^1 e^{x^2} dx$. Правая

часть неравенств доказана. Таким образом, неравенства доказаны полностью.

350. Найти среднее значение функции $f(x)$ на указанных сегментах:

а) $f(x) = 2x^2 + 1$ на сегменте $[0, 1]$;

б) $f(x) = \sin x$ на сегменте $[0, 2\pi]$;

в) $f(x) = \frac{1}{x}$ на сегменте $[1, 2]$.

351. Не вычисляя интегралов, установить, величина какого из указанных ниже интегралов больше:

а) $\int_1^2 x dx$ или $\int_1^2 \frac{dx}{x}$;

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ или $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx$;

$$в) \int_0^1 e^x dx \text{ или } \int_0^1 x dx.$$

352. Доказать неравенства:

$$а) 2 < \int_{-2}^4 x^2 dx < 25; \quad б) 1 < \int_1^5 \frac{dx}{x} < 3;$$

$$в) \frac{2}{\sqrt[4]{e}} < \int_0^2 e^{x^2 - x} dx < 2e^2.$$

353. Найти производную функции:

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \ln t dt.$$

Решение. Из теоретического курса известно, что производная интеграла с постоянным нижним пределом и переменным верхним пределом равна подынтегральной функции при значении ее аргумента, равном верхнему пределу. Пользуясь свойствами определенного интеграла, преобразуем данный интеграл:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{x^2}^a \ln t dt + \int_a^{x^3} \ln t dt = \\ &= \int_a^{x^3} \ln t dt - \int_a^{x^2} \ln t dt. \end{aligned}$$

Найдем теперь производную заданной функции, пользуясь правилом дифференцирования сложной функции

$$F'(x) = 3x^2 \ln x^3 - 2x \ln x^2 = x(9x - 4) \ln x.$$

354. Функция задана параметрически:

$$x = \int_1^{t^2} \frac{e^x}{x^2} dx; \quad y = \int_0^{2t^2} e^x dx.$$

Найти производную $\frac{dy}{dx}$.

Решение. Если функция задана параметрически уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Найдем предварительно $\frac{dy}{dt}$ и $\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} = 4te^{2t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = 2t \cdot \frac{et^2}{t^4} = \frac{2et^2}{t^3}.$$

Таким образом,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4te^{2t^2} \cdot t^3}{2et^2} = 2t^4 e^{t^2}.$$

В задачах 355—356 найти производные следующих функций:

$$355. \quad y = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{2 \sin t}{t} dt.$$

$$356. \quad z = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2x}} 2 \sin t^2 dt.$$

357. Кривая задана уравнениями в параметрической форме:

$$x = \int_1^t \frac{\cos x}{x} dx, \quad y = \int_1^t \frac{\sin x}{x} dx.$$

Определить величину угла, образованного касательной к этой кривой с положительным направлением оси Ox .

358. Кривая задана уравнением:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x \sqrt{3 - 2 \sin^2 z} dz + \int_0^y \cos t dt = 0.$$

Определить величину угла, образованного касательной к этой кривой в точке $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ с положительным направлением оси Ox .

359. Найти точки экстремума функции

$$y = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

в области $x > 0$.

360. Найти точки экстремума и точки перегиба для функции

$$y = \int_0^x (t - 1)(t - 2)^2 dt.$$

§ 2. Вычисление определенных интегралов с помощью первообразных. Применение к вычислению рядов

1. **Формула Ньютона — Лейбница.** Предварительно изучите по учебнику Г. М. Фихтенгольца главу XI, п° 183, 185.

Выведенная в учебнике (см. п° 185) формула (А) носит название *формулы Ньютона — Лейбница*. Она является самым эффективным и простым средством вычисления определенного интеграла. Таким образом, для того чтобы

вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$, надо пред-

варительно вычислить соответствующий неопределенный интеграл $\int f(x) dx$, применяя какой-нибудь из способов, изученных в первой части настоящей книги, а затем, отбросив произвольную постоянную, вычислить значение полученной функции при $x = b$ и при $x = a$ и вычесть из первого второе.

Прежде чем приступить к применению формулы Ньютона — Лейбница к заданному определенному интегралу, надо предварительно посмотреть, имеет ли подынтегральная функция особые точки. Если она на заданном промежутке интегрирования непрерывна или имеет конечное число точек разрыва I рода (см. учебник, п° 67), то формулу Ньютона — Лейбница можно применить. Если же в промежутке интегрирования подынтегральная функция имеет хотя бы одну точку разрыва II рода (см. учебник,

п° 67), то применять формулу Ньютона — Лейбница нельзя.

Рассмотрим, например, интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$. Применяя формулу Ньютона — Лейбница, мы получим следующий результат:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -1 - 1 = -2,$$

который безусловно является абсурдным, так как определенный интеграл от функции, положительной на всем промежутке интегрирования, не может быть отрицательным.

Дело в том, что в заданном примере мы не имели права применять формулу Ньютона — Лейбница, так как подынтегральная функция $\frac{1}{x^2}$ в точке $x = 0$, принадлежащей промежутку интегрирования, имеет разрыв II рода.

Приведенный определенный интеграл принадлежит к так называемым несобственным интегралам. Подробнее о несобственных интегралах см. Г. М. Фихтенгольц, Основы математического анализа, т. II, п° 288, 289.

Чтобы предупредить читателя о возможных ошибках, рассмотрим еще один пример необоснованного применения формулы Ньютона — Лейбница, приводящего к абсурдным результатам.

Вычислим, например, интеграл:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} dx.$$

Нередко рассуждают так: применяя известную из курса тригонометрии формулу

$$\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} = \cos x, \quad (1)$$

находим:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} dx = \int_0^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi} = 0.$$

Мы получили, однако, заведомо неправильный результат. В самом деле, подынтегральная функция $\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$ на промежутке $[0, \pi]$ лишь в точке $x = \frac{\pi}{2}$ обращается в нуль, во всех остальных точках этого промежутка она больше нуля и, следовательно, заданный определенный интеграл никак не может быть равен нулю.

Ошибка была допущена в тригонометрической формуле (1). Действительно, левая часть формулы всегда либо больше, либо равна нулю, в то время как ее правая часть больше или равна нулю на промежутке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и меньше или равна нулю на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Таким образом, вместо формулы (1) следует писать:

$$\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} = |\cos x| = \begin{cases} \cos x & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\cos x & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Теперь получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx &= \int_0^{\pi} |\cos x| dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \\ &= 1 - 0 - 0 + 1 = 2. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. При вычислении определенных интегралов полезно помнить также, что если $f(x)$ — четная функция, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx,$$

а если $f(x)$ — нечетная функция, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

361. Вычислить интеграл:

$$\int_0^2 \frac{x \, dx}{x^4 + 1}.$$

Решение. По формуле Ньютона — Лейбница (см. учебник, п° 185) имеем:

$$\int_0^2 \frac{x}{x^4 + 1} \, dx = F(x) \Big|_0^2 = F(2) - F(0),$$

где $F(x)$ — любая первообразная для функции $\frac{x}{x^4 + 1}$.

Найдем первообразную функцию $F(x)$ и вычислим разность значений этой первообразной при $x = 2$ и $x = 0$. Предварительно найдем неопределенный интеграл:

$$F(x) = \int \frac{x \, dx}{x^4 + 1}.$$

Применяя подстановку $x^2 = t$, откуда $2x \, dx = dt$, получаем:

$$\frac{x \, dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C.$$

Следовательно,

$$F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2.$$

(Напомним, что все остальные первообразные будут отличаться от найденной на произвольную постоянную C .) Пользуясь формулой Ньютона — Лейбница, найдем:

$$F(2) - F(0) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 4 - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 4.$$

Таким образом,

$$\int_0^2 \frac{x \, dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 4.$$

362. Вычислить интеграл:

$$\int_{-1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x \Big|_{-1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \\ &= \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin (-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

363. Вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx, \quad \text{б) } \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx,$$

$$\text{в) } \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx,$$

при условии, что m и n — целые положительные числа.

Решение. а) Воспользовавшись первой формулой (13) на стр. 75, получим:

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos (m-n)x}{m-n} + \frac{\cos (m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} & \text{при } m \neq n, \\ -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos 2nx}{2n} \right]_{-\pi}^{\pi} & \text{при } m = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку $\cos x$ — функция четная, то выражения в квадратных скобках принимают одинаковые значения при $x = -\pi$ и $x = \pi$, следовательно, в обоих случаях искомый интеграл равен нулю. Таким образом,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0. \quad (1)$$

б) Точно так же вычислим второй интеграл. По второй формуле (13) имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \\ & = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (m-n)x}{m-n} - \frac{\sin (m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} \quad \text{при } m \neq n \\ \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin 2nx}{2n} \right]_{-\pi}^{\pi} \quad \text{при } m = n \end{array} \right\} = \\ & = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (m-n)\pi}{m-n} - \frac{\sin (m+n)\pi}{m+n} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (m-n) \cdot (-\pi)}{m-n} - \right. \\ \quad \left. - \frac{\sin (m+n) \cdot (-\pi)}{m+n} \right] \quad \text{при } m \neq n, \\ \frac{1}{2} \left[\pi - \frac{\sin 2n\pi}{2n} \right] - \frac{1}{2} \left[-\pi - \frac{\sin 2n\pi}{2n} \right] \quad \text{при } m = n. \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Так как m и n — целые положительные числа, а $\sin k\pi = 0$ при любом целом k , то окончательно получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \pi & \text{при } m = n. \end{cases} \quad (2)$$

в) Вычисление третьего интеграла не доставит нам теперь почти никакого труда. В самом деле, воспользовавшись третьей формулой (13), найдем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (m-n)x}{m-n} + \frac{\sin (m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} & \text{при } m \neq n, \\ \frac{1}{2} \left[x + \frac{\sin 2nx}{2n} \right]_{-\pi}^{\pi} & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Рассуждая так же, как при вычислении второго интеграла, окончательно получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \pi & \text{при } m = n. \end{cases} \quad (3)$$

Соотношения (1), (2) и (3) чрезвычайно важны. Они называются *условиями ортогональности* последовательностей тригонометрических функций

$$\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \sin mx, \dots$$

и

$$\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots, \cos mx, \dots$$

Применяя формулу Ньютона—Лейбница, вычислить следующие интегралы:

$$364. \int_1^3 \frac{dx}{x}. \quad 365. \int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + 3x + 2}. \quad 366. \int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$367. \int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)^2}. \quad 368. \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} dx. \quad 369. \int_0^2 \frac{dx}{9 + x^2}.$$

$$370. \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx. \quad 371. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 - \cos x}. \quad 372. \int_0^{\pi} \frac{dx}{3 + 2 \cos x}.$$

$$373. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx. \quad 374. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x \sin^4 x}. \quad 375. \int_0^1 \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}.$$

$$376. \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}. \quad 377. \int_1^e \frac{\sin(\ln x) dx}{x}. \quad 378. \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}.$$

2. Вычисление пределов с помощью определенных интегралов. В практической жизни встречаются задачи, решение которых приводит к вычислению пределов сумм, когда число слагаемых неограниченно возрастает. Такие пределы можно вычислить, пользуясь определением определенного интеграла. Для этого следует преобразовать данную сумму так, чтобы она оказалась интегральной для некоторой функции, которую затем и проинтегрировать.

379. Пользуясь определением определенного интеграла, вычислить предел суммы:

$$\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2},$$

когда $n \rightarrow \infty$.

Решение. Преобразуем данную сумму, вынося за скобки общий множитель $\frac{1}{n}$, тогда первый множитель

можно рассматривать как длину частичного промежутка разбиения отрезка $[0, 1]$ на n равных частей, а сумму, стоящую в скобках, как сумму значений функции $f(x) = x$ в самых правых точках разбиения указанного отрезка (они то и выбраны в качестве точек ξ_i):

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$ (при $n \rightarrow \infty$), получим:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \\ &= \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

380. Пользуясь определением определенного интеграла, вычислить:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \left(1 + \sqrt{\frac{n}{n+3}} + \sqrt{\frac{n}{n+6}} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{n}{n+9}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}} \right). \end{aligned}$$

Решение. Первый множитель $\frac{3}{n}$ — длина частичного промежутка разбиения отрезка $[0, 3]$. Если этот промежуток разбит на n равных частей и в качестве точек ξ_i выбраны самые левые точки деления, то сумму, стоящую в скобках, можно рассматривать, как значения функции $f(x) = \sqrt{\frac{1}{1+x}}$ в указанных точках ξ_i .

В самом деле, для последовательности точек ξ_i

$$0, \frac{3}{n}, \frac{6}{n}, \frac{9}{n}, \dots, \frac{3(n-1)}{n}$$

соответствующая последовательность значений функции $f(x)$ в выбранных точках ξ_i будет:

$$\sqrt{\frac{1}{1+0}}, \sqrt{\frac{1}{1+\frac{3}{n}}}, \sqrt{\frac{1}{1+\frac{6}{n}}},$$

$$\sqrt{\frac{1}{1+\frac{9}{n}}}, \dots, \sqrt{\frac{1}{1+\frac{3(n-1)}{n}}}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \left(1 + \sqrt{\frac{n}{n+3}} + \sqrt{\frac{n}{n+6}} + \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{n}{n+9}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}} \right) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{1+\frac{3}{n}}} + \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{1}{1+\frac{6}{n}}} + \dots + \sqrt{\frac{1}{1+\frac{3(n-1)}{n}}} \right) = \\ & = \int_0^3 \sqrt{\frac{1}{1+x}} dx = \int_0^3 (1+x)^{-\frac{1}{2}} dx = 2(1+x)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^3 = \\ & = 4 - 2 = 2. \end{aligned}$$

Пользуясь определением определенного интеграла, вычислить следующие пределы:

$$381. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right).$$

$$382. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}}.$$

$$383. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[k]{2} + \sqrt[k]{3} + \dots + \sqrt[k]{n}}{\sqrt[k]{n^{k+1}}}.$$

$$384. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{(n+1)(n+2) \dots (2n+1) 2n}{n^n}.$$

$$385. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n}{n}} \right).$$

$$386. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right).$$

$$387. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right).$$

§ 3. Замена переменной. Интегрирование по частям

1. Замена переменной в определенном интеграле. Предварительно изучите по учебнику Г. М. Фихтенгольца главу XI, п° 186. Разберите примеры, решенные в этом пункте. Обратите особое внимание на выполнимость условий, при которых становится возможной замена переменной.

В теоретическом курсе доказывается, что определен-

ный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ при выполнении ряда условий мо-

жет быть заменен другим определенным интегралом

$\int_a^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$, т. е.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

При этом используется замена переменной $x = \varphi(t)$.

З а м е ч а н и е. При вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной нет необходимости затем возвращаться к старой переменной (как мы это делали при вычислении неопределенного интеграла).

388. Вычислить интеграл:

$$\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

Решение. Введем новую переменную t , положив $x = \varphi(t) = 2 \sin t$. Покажем, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет всем условиям теоремы о замене переменной в определенном интеграле. В самом деле,

1) функция $\varphi(t) = 2 \sin t$ определена и непрерывна для всех значений t и, в частности, на некотором промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, и ее значения не выходят за пределы промежутка $[-2, +2]$, когда t изменяется в $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$;

$$2) \varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2, \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2;$$

3) существует в $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ непрерывная производная $\varphi'(t) = 2 \cos t$.

Итак, указанная замена переменной законна. Тогда для $x = 2 \sin t$ будет $dx = 2 \cos t dt$,

$$4 - x^2 = 4 - 4 \sin^2 t = 4(1 - \sin^2 t) = 4 \cos^2 t.$$

Так как $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, то, заменяя переменную в определенном интеграле и учитывая четность подынтегральной функции, получим:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos t \cdot 2 \cos t dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 4 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= 4 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = 2\pi. \end{aligned}$$

У к а з а н и е. Для отыскания пределов интегрирования новой переменной t используйте равенство $x = \varphi(t)$. Нижний предел α найдется, если вместо x подставить значение нижнего (старого) предела:

$$-2 = 2 \sin t, \quad \sin t = -1, \quad t = -\frac{\pi}{2}, \quad \alpha = -\frac{\pi}{2}.$$

Верхний предел β найдется, если вместо x подставить значение верхнего (старого) предела:

$$2 = 2 \sin t, \quad \sin t = 1, \quad t = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \frac{\pi}{2}.$$

389. Вычислить интеграл:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$$

Р е ш е н и е. Введем новую переменную t , связанную со старой переменной x соотношением $x = \varphi(t) = \cos t$. Покажем, что такая замена переменной законна.

Действительно: 1) функция $\varphi(t) = \cos t$ определена и непрерывна на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ (так как она определена и непрерывна на всей числовой прямой), и ее значения не выходят за пределы промежутка $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, когда t изменяется в $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$;

$$2) \quad \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

3) существует в $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ непрерывная производная

$$\varphi'(t) = -\sin t.$$

Итак, вводим новую переменную t , полагая $x = \cos t$.

$$\text{Тогда } \frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\cos t}{1-\cos t} = \frac{2 \cos^2 \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}^2 \frac{t}{2}, \quad dx = -\sin t dt.$$

Так как $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, то, заменяя переменную в опре-

деленном интеграле, получим:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \cdot (-\sin t) dt = \\
 &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \frac{t}{2} \cdot 2 \sin \frac{t}{2} \cdot \cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt = -2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \frac{t}{2} dt = \\
 &= -2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos t}{2} dt = - (t + \sin t) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \\
 &= - \left[\left(\frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \right) - \left(\frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \right) \right] = -\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} + 1 = \\
 &= 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}.
 \end{aligned}$$

390. Вычислить интеграл: $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}} dx.$

Решение. Введем новую переменную t , положив $x = t^6$. (Почему возможна такая замена?) Тогда $dx = 6t^5 dt$. Найдем пределы интегрирования для новой переменной t :

$$\begin{aligned}
 0 &= t^6, \quad t = 0, & \alpha &= 0; \\
 1 &= t^6, \quad t = 1, & \beta &= 1.
 \end{aligned}$$

Заменяя переменную в определенном интеграле, получим

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}} dx &= \int_0^1 \frac{t^3 + 1}{t^2 + 1} \cdot 6t^5 dt = \\
 &= 6 \int_0^1 \left(t^6 - t^4 + t^3 + t^2 - t - 1 + \frac{t+1}{t^2+1} \right) dt =
 \end{aligned}$$

$$= 6 \left(\frac{1}{7} t^7 - \frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 - t + \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) + \operatorname{arctg} t \right) \Big|_0^1 = 6 \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= 3 \ln 2 + \frac{3\pi}{2} - \frac{409}{70}.$$

Применяя соответствующую замену переменной, вычислить интегралы:

$$391. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}. \quad 392. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}. \quad 393. \int_0^1 \sqrt{x^2+2x} dx.$$

$$394. \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}. \quad 395. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx.$$

$$396. \int_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}} dx. \quad 397. \int_5^{10} \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}} dx.$$

$$398. \int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}. \quad 399. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1-\sin x}.$$

$$400. \int_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}. \quad 401. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}.$$

2. Интегрирование по частям в определенном интеграле. Рассмотрите внимательно решение примеров, помещенных в п° 187. Обратите особое внимание на выполнение необходимых условий, при которых операция интегрирования по частям будет законна.

$$402. \text{ Вычислить интеграл: } \int_1^2 (\ln x)^2 dx.$$

Решение. Обозначим $(\ln x)^2$ через u , а dx через dv ,

$$\text{т. е. } u = (\ln x)^2, \quad \text{тогда } \begin{cases} du = 2 \ln x \frac{dx}{x}. \\ v = x \end{cases}$$

$$dv = dx,$$

Эта операция является законной, так как в промежутке $[1, 2]$ функции u и v являются непрерывными функциями и имеют непрерывные производные u' и v' .

В теоретическом курсе было показано, что при выполнении этих условий

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_1^2 (\ln x)^2 dx &= x (\ln x)^2 \Big|_1^2 - 2 \int_1^2 x \ln x \frac{dx}{x} = \\ &= x (\ln x)^2 \Big|_1^2 - 2 \int_1^2 \ln x dx = 2 (\ln 2)^2 - 2 \int_1^2 \ln x dx. \end{aligned}$$

Интеграл $\int_1^2 \ln x dx$ снова берем по частям, полагая

$$\begin{aligned} u &= \ln x, \\ dv &= dx, \end{aligned} \quad \text{тогда} \quad \begin{cases} du = \frac{dx}{x}, \\ v = x. \end{cases}$$

(Мы пропускаем доказательство законности данной операции, так как оно аналогично доказательству, приведенному ранее.)

$$\begin{aligned} \text{Получим: } \int_1^2 \ln x dx &= x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 dx = 2 \ln 2 - x \Big|_1^2 = \\ &= 2 \ln 2 - 1. \end{aligned}$$

Окончательно получим:

$$\int_1^2 (\ln x)^2 dx = 2 \ln^2 2 - 4 \ln 2 + 2 = 2 (\ln 2 - 1)^2.$$

403. Вычислить интеграл: $\int_2^1 x e^x dx$.

Решение. Обозначим x через u и $e^x dx$ через dv ,

$$\begin{array}{lcl} & u = x, & \\ \text{т. е.} & & \text{тогда} \\ & dv = e^x dx, & \left\{ \begin{array}{l} du = dx, \\ v = e^x. \end{array} \right. \end{array}$$

Легко показать, что данная операция является законной: функции $u = x$ и $v = e^x$ — функции непрерывные и имеют в каждой точке промежутка $[0, 1]$ непрерывные производные. Следовательно,

$$\int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = x e^x - e^x \Big|_0^1 = 1.$$

Используя метод интегрирования по частям, вычислить следующие интегралы:

$$\begin{array}{lll} 404. \int_0^1 x e^{-x} dx. & 405. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\sin^2 x}. & 406. \int_0^{2\pi} x^2 \sin x dx. \\ 407. \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx. & 408. \int_{-a}^a \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}. & \\ 409. \int_0^1 x^3 \operatorname{arctg} x dx. & 410. \int_{-1}^1 x \cdot 2^x dx. & 411. \int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx. \\ 412. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx. & 413. \int_0^1 \arcsin x dx. & \end{array}$$

Метод интегрирования по частям в определенном интеграле часто используется для получения удобных рекуррентных формул, позволяющих сводить данный интеграл к интегралу такого же типа, но более простому.

414. Вычислить интеграл:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

Решение. Преобразуем данный интеграл:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x \, dx.$$

Применяя метод интегрирования по частям, положим:

$$\begin{aligned} u &= \sin^{n-1} x, \\ dv &= \sin x \, dx, \end{aligned} \quad \text{тогда} \quad \begin{cases} du = (n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos x \, dx, \\ v = -\cos x. \end{cases}$$

Итак,

$$\begin{aligned} I_n &= -\sin^{n-1} x \cdot \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x \, dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x \, dx, \text{ так как } -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Выполняя простые тригонометрические преобразования, получим:

$$\begin{aligned} (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \end{aligned}$$

или

$$I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n,$$

где I_n обозначает $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$.

Мы получили уравнение относительно I_n , решая которое получим рекуррентную формулу для вычисления I_n :

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

(Сравни с формулой (19) на стр. 86). Применяя аналогичные преобразования, получим:

$$I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-4}$$

или

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot I_{n-4} \quad \text{и т. д.}$$

Продолжая указанный процесс, мы дойдем или до значения I_0 , или до значения I_1 в зависимости от того, будет ли n четным или нечетным числом.

Рассмотрим два случая:

1) $n = 2m$ (n — четное число). В этом случае

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0;$$

2) $n = 2m+1$ (n — нечетное число). В этом случае

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1.$$

Но так как

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

а

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1,$$

то

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

и

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1.$$

415. Вычислить интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \quad (n = 2m, \quad n = 2m + 1).$$

416. Составить рекуррентную формулу для вычисления

интеграла $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$. Провести исследование.

417. Доказать равенство:

$$\int_0^1 (1 - x^2)^m \, dx = \frac{2m(2m-2) \dots 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2m+1)(2m-1) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1}$$

(m — целое положительное число).

418. Вычислить, используя результат примера 414:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{15} x \, dx.$$

419. Вычислить, используя результат примера 415:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{20} x \, dx.$$

§ 4. Приближенное интегрирование

Предварительно изучите по учебнику Г. М. Фихтенгольца главу XI, п^о 189 — 190. Разберите примеры, приведенные в п^о 192.

420. Вычислить приближенно:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2.$$

Решение. Функция $\frac{1}{x}$ задана на сегменте $[1, 2]$.

Разобьем сегмент $[1, 2]$ на 10 равных частей. Тогда

$$\Delta x = \frac{2-1}{10} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

Составим таблицу значений подынтегральной функции.

x	$y = \frac{1}{x}$	x	$y = \frac{1}{x}$
$x_0 = 1,0$	$y_0 = 1,00000$	$x_6 = 1,6$	$y_6 = 0,62500$
$x_1 = 1,1$	$y_1 = 0,90909$	$x_7 = 1,7$	$y_7 = 0,58824$
$x_2 = 1,2$	$y_2 = 0,83333$	$x_8 = 1,8$	$y_8 = 0,55556$
$x_3 = 1,3$	$y_3 = 0,76923$	$x_9 = 1,9$	$y_9 = 0,52632$
$x_4 = 1,4$	$y_4 = 0,71429$	$x_{10} = 2,0$	$y_{10} = 0,50000$
$x_5 = 1,5$	$y_5 = 0,66667$		

Используем для вычисления $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ одну из формул приближенного интегрирования.

1. Применим первую формулу прямоугольников (значение интеграла получается с избытком):

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \Delta x (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) =$$

$$= 0,1 \cdot 7,18773 = 0,71877.$$

2. Применим вторую формулу прямоугольников (значение интеграла получается с недостатком):

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \Delta x (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = 0,1 \cdot 6,6877 = 0,66877.$$

3. Применим формулу трапеций:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \Delta x \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right) \approx$$

$$\approx 0,1 \left(\frac{1 + 0,5}{2} + 6,18773 \right) = 0,69377.$$

4. Применим формулу парабол (Симпсона):

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{0,1}{3} \left[(y_0 + y_{10}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + \right.$$

$$\left. + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) \right] =$$

$$= \frac{0,1}{3} \cdot 2,07945 = 0,69315.$$

Более точное вычисление значения $\ln 2$ дает число 0,6931472.

Таким образом, формула Симпсона дает совпадение до пяти значащих цифр. Наименее точный результат дает формула прямоугольников (один верный знак).

З а м е ч а н и е. Совершенно очевидно, что точность вычисления увеличивается с возрастанием числа точек деления. Всегда можно подобрать достаточное число точек деления так, чтобы производить вычисления с любой наперед заданной степенью точности.

Для определения числа точек деления, необходимых для вычисления интеграла с заданной степенью точности, можно воспользоваться формулами оценки погрешности, приведенными в п° 191 учебника Г. М. Фихтенгольца.

421. Применяя формулу Симпсона, вычислить значение π

из соотношения $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ (при вычислении примите $n = 10$).

422. Применяя формулу Симпсона, вычислить прибли-

женное значение $\ln 5$ из соотношения $\ln 5 = \int_1^5 \frac{dx}{x}$ (при вычислении примите $n = 10$).

423. По следующей таблице значений x и $f(x)$

x	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35
$f(x)$	2,36	2,50	2,74	3,04	3,46	3,98	4,60

вычислить интеграл $\int_{1,05}^{1,35} f(x) dx$, пользуясь формулой Симпсона.

Дополнительные задачи к главе III

Пользуясь определением определенного интеграла, вычислить интегралы:

424. $\int_2^3 2^x dx.$

425. $\int_2^4 x^2 dx.$

426. Найти среднее значение функции $f(x) = x(3 + 2x - x^2)$ на отрезке $[1, 2]$.

427. Найти среднее значение функции $f(x) = x \sin x$ на отрезке $[0, \pi]$.

428. Найти среднее значение функции $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x}$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Следующие определенные интегралы вычислите с помощью замены переменной.

$$429. \int_0^a x^2 \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx, \quad a > 0.$$

У к а з а н и е. Воспользуйтесь подстановкой $x = a \cos t$.

$$430. \int_3^6 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}}.$$

У к а з а н и е. Воспользуйтесь подстановкой $x = 3 \operatorname{tg} t$.

$$431. \int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2} dx.$$

У к а з а н и е. Воспользуйтесь подстановкой $x = 2a \sin^2 t$.

$$432. \int_1^3 \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 5x + 1}}.$$

$$433. \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1 + x^2)^2}.$$

Найти производные следующих функций:

$$434. \Phi(x) = \int_3^{\sin x} \cos t dt, \quad 435. \Phi(x) = \int_{\frac{2}{x}}^{x^2} \frac{dt}{t}.$$

$$436. x = \int_2^t \frac{\ln x}{x} dx, \quad y = \int_5^{\ln t} e^x dx.$$

$$437. x = \int_{c^2}^{\sin t} \arcsin x dx, \quad y = \int_{\pi}^{\sqrt{t}} \frac{\sin x^2}{x} dx.$$

Найти экстремум следующих функций:

$$438. \Phi(x) = \int_1^x e^{-\frac{t^2}{2}} (1 - t^2) dt .$$

$$439. F(x) = \int_3^{e^x} \ln t \, dt .$$

Применяя формулу интегрирования по частям, вычислить интегралы:

$$440. \int_1^2 (x^2 + 1) e^x \, dx .$$

$$441. \int_1^2 (3x + 2) \ln x \, dx .$$

$$442. \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x \sin x \, dx .$$

ГЛАВА IV

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Вычисление площадей

Внимательно изучите по учебнику Г. М. Фихтенгольца главу XII, п° 193 — 196. Разберите примеры, приведенные в п° 196. При решении задач с геометрическим содержанием всегда старайтесь сопровождать решение чертежом.

1. Уравнения кривых заданы в декартовой системе координат.

443. Вычислить площадь фигуры, ограниченной дугой параболы $y = x^2 + 2$, прямыми $x = 1$, $x = 4$ и отрезком оси абсцисс.

Решение. В теоретическом курсе показано, что площадь криволинейной трапеции численно равна определенному интегралу

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

В данном случае (рис. 5) криволинейная трапеция $ABDC$, площадь которой мы вычисляем, ограничена параллельными прямыми AB и CD , отрезком прямой AC и отрезком кривой линии BD .

Искомая площадь равна:

$$S = \int_1^4 (x^2 + 2) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_1^4 = 27.$$

444. Вычислить площадь трапеции, ограниченной дугой параболы $y^2 = 4x$ и отрезком прямой $x = 2$.

Решение. Из рисунка 6 видно, что искомая площадь расположена симметрично относительно оси абсцисс и, следовательно,

$$S = 2 \int_0^2 \sqrt{x} dx = \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \bigg|_0^2 = \frac{8}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3} \sqrt{2}.$$

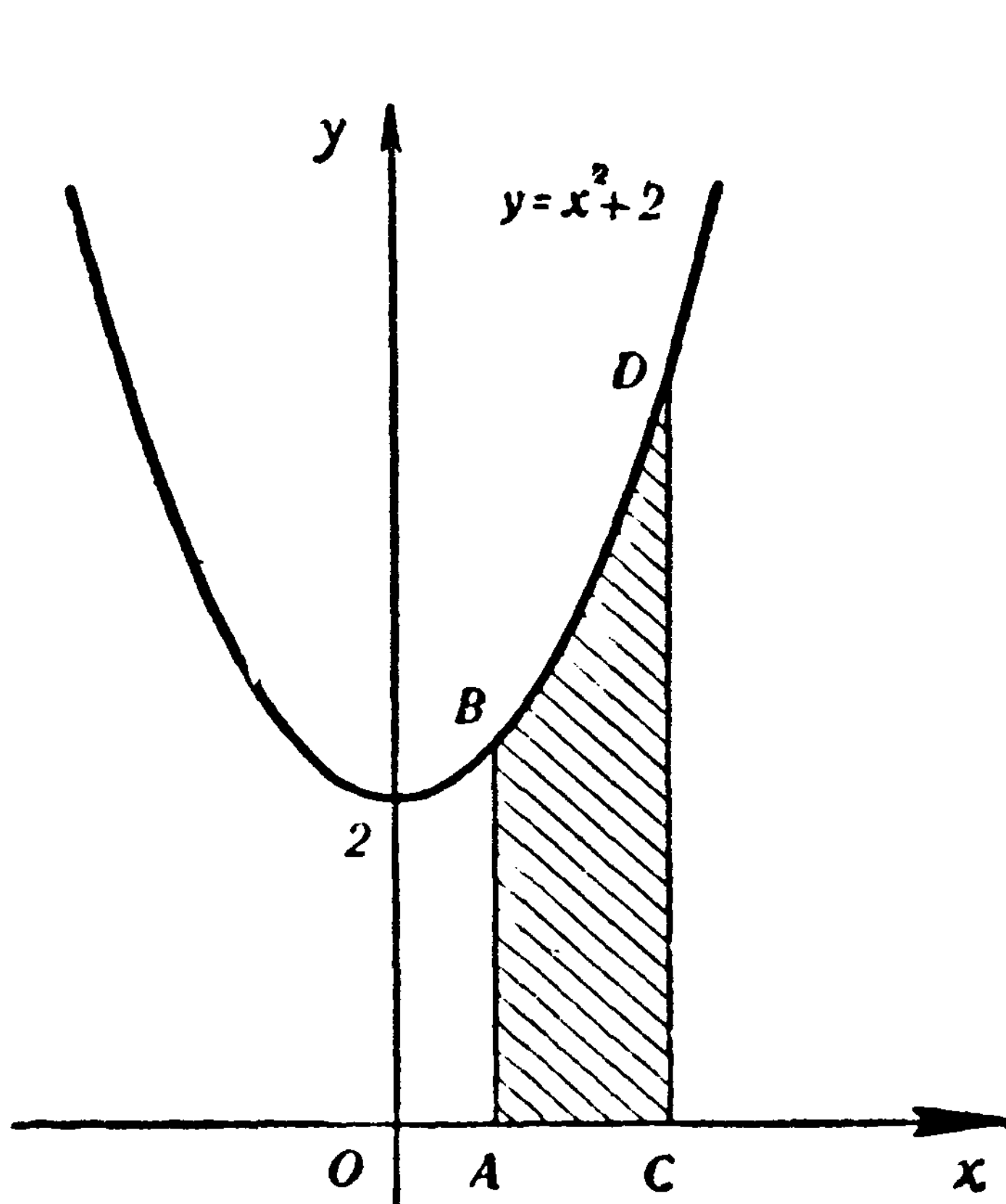


Рис. 5.

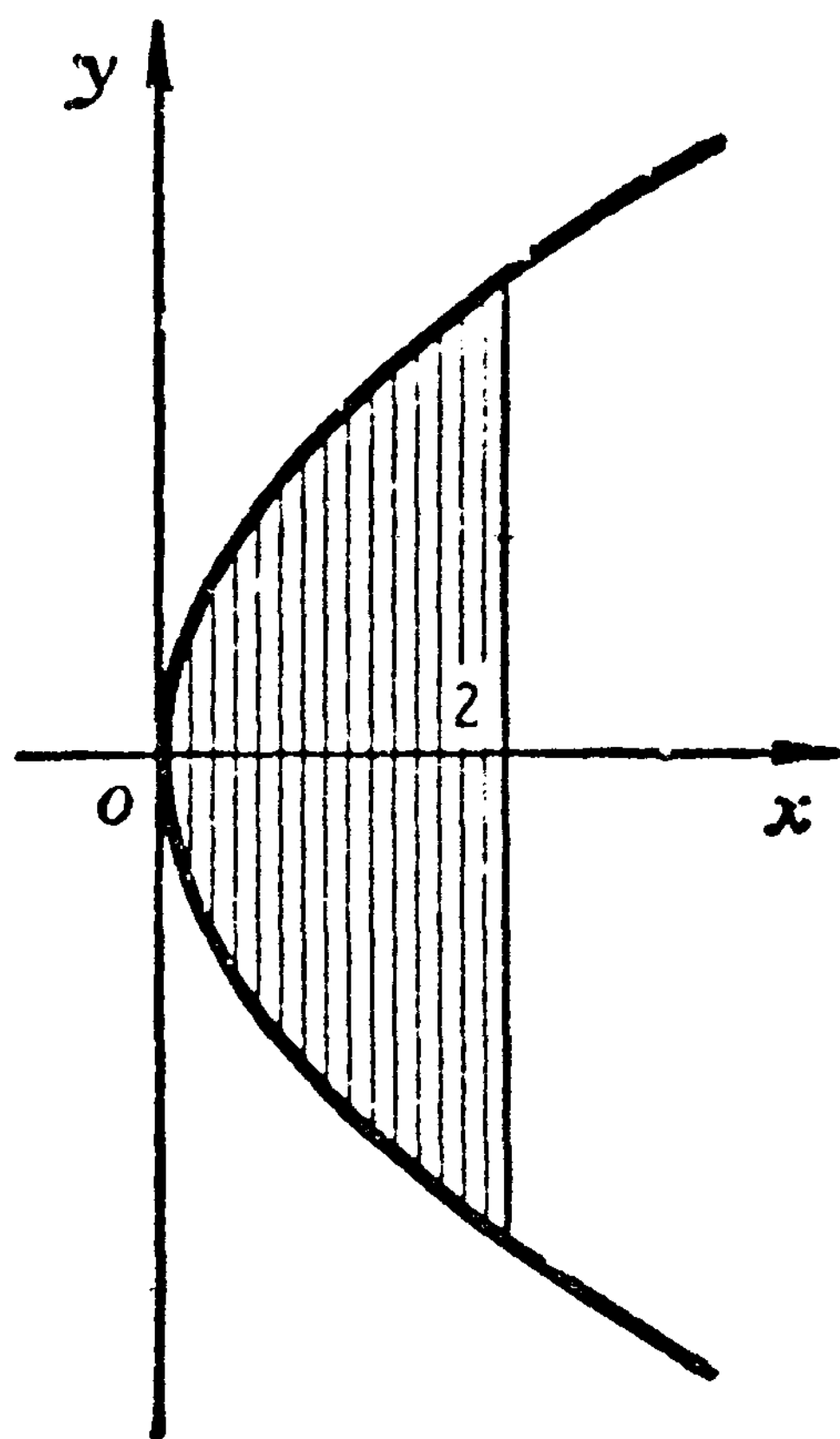


Рис. 6.

445. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y^2 = 4x \text{ и } x^2 = 4y.$$

Решение. На рисунке 7 изображена фигура, площадь которой мы должны вычислить. Как видно из рисунка, площадь фигуры $OBMAO$ можно представить как разность двух площадей (пл. $OBMPO$ и $OAMP O$, где MP — перпендикуляр, опущенный из точки M на ось Ox).

Найдем координаты точки M . Решая систему уравнений

$$y^2 = 4x, \quad y = \frac{x^2}{4},$$

получим $x = 4$, $y = 4$; $M(4, 4)$. Следовательно,

$$S = \int_0^4 \sqrt{4x} dx - \int_0^4 \frac{x^2}{4} dx = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \bigg|_0^4 - \frac{x^3}{12} \bigg|_0^4 = \frac{16}{3}.$$

Легко видеть, что данную задачу можно решить и другим путем. Искомую площадь можно представить в виде разности двух площадей — пл. $OAMNO$ и пл. $OVMNO$ (MN — перпендикуляр, опущенный из точки M на ось Oy):

$$S = S_{OAMNO} - S_{OVMNO}.$$

Тогда

$$S = \int_0^4 \sqrt{4y} \, dy - \int_0^4 \frac{y^2}{4} \, dy.$$

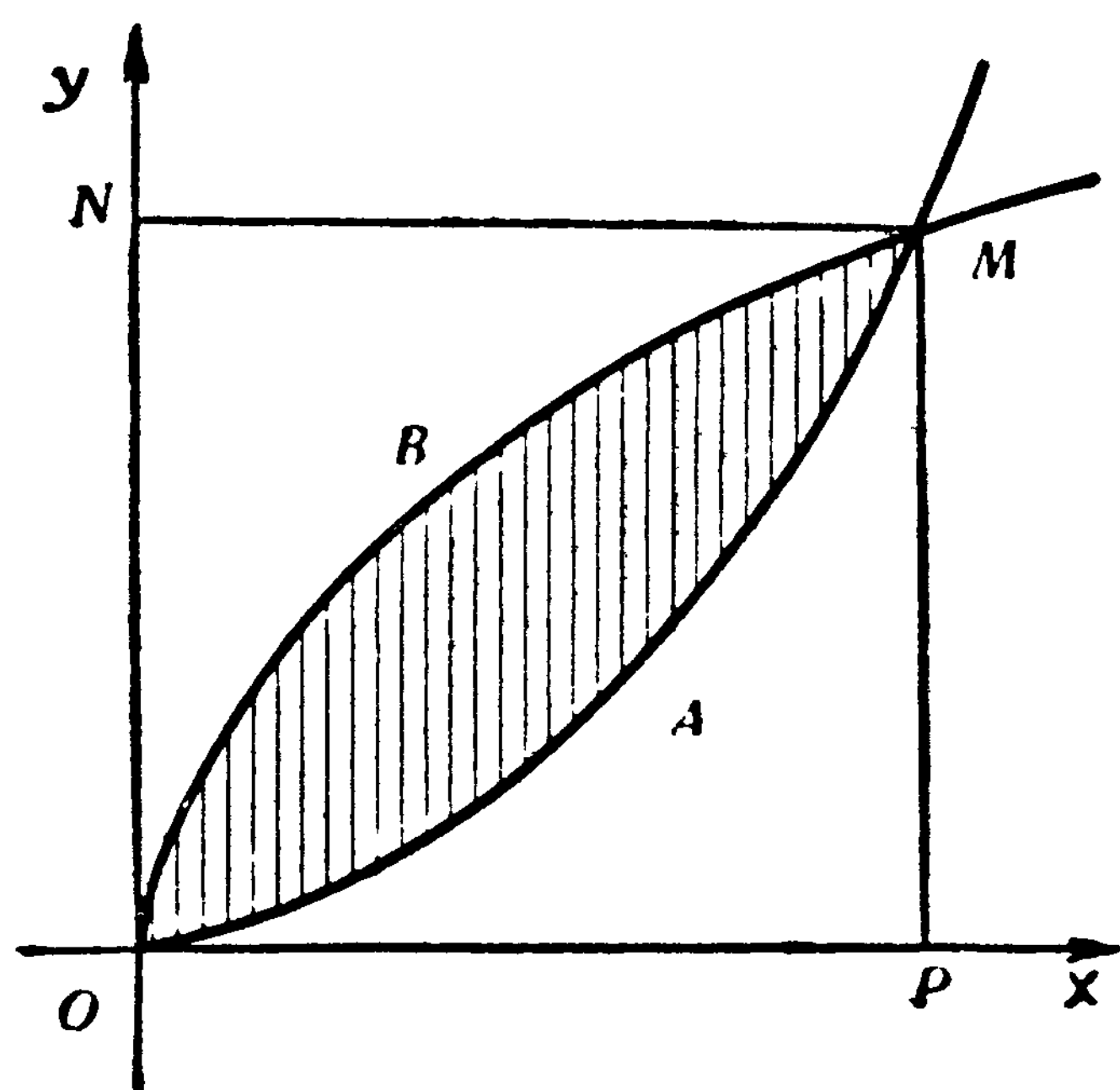


Рис. 7.

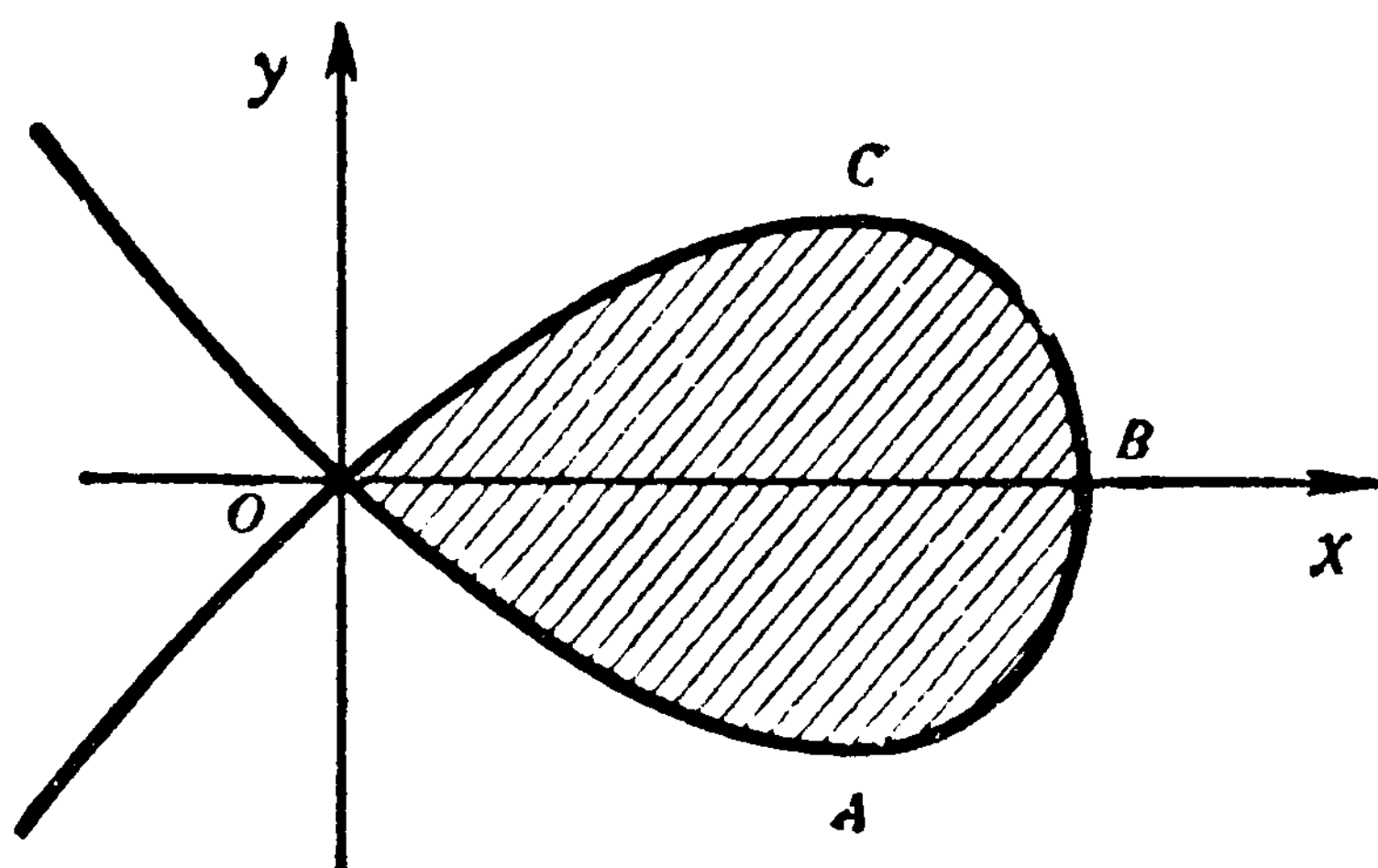


Рис. 8.

Ясно, что значение площади $OВМАО$ не зависит от способа ее вычисления.

446. Вычислить площадь фигуры, ограниченной петлей кривой:

$$a(y^2 - x^2) + x^3 = 0.$$

Решение. Из уравнений кривой видно, что она расположена симметрично относительно оси Ox . Следовательно, можно легко вычислить половину искомой площади (см. рис. 8).

Рекомендуем провести самостоятельно подробное исследование кривой.

Записав уравнение кривой в виде $ay^2 = x^2(a - x)$, легко найдем точки пересечения кривой с осью Ox , положив $y = 0$. Мы получим $x_1 = 0$, $x_2 = a$. Учитывая все сказанное, окончательно найдем:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} S &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^a x \sqrt{a-x} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^a [a - (a-x)] \sqrt{a-x} dx = \\
&= \sqrt{a} \int_0^a (a-x)^{\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^a (a-x)^{\frac{3}{2}} dx = \\
&= -\sqrt{a} \frac{(a-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^a + \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{(a-x)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \Big|_0^a = \\
&= \frac{2}{3} \sqrt{a} a^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5 \sqrt{a}} a^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{3} a^2 - \frac{2}{5} a^2 = \frac{4}{15} a^2.
\end{aligned}$$

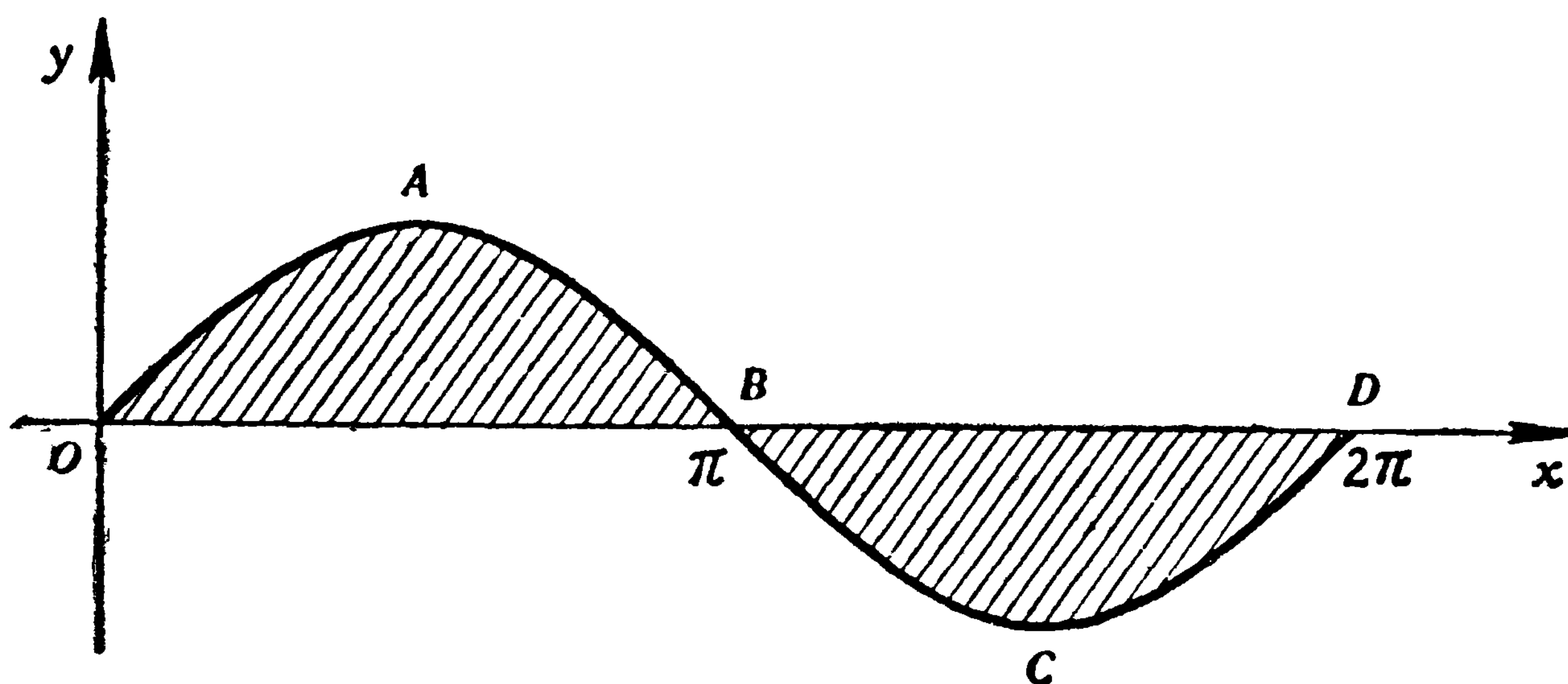


Рис. 9.

Вся площадь петли равна:

$$S = \frac{8}{15} a^2.$$

447. Вычислить площадь фигуры, ограниченной синусоидой $y = \sin x$ и осью Ox , если $0 \leq x \leq 2\pi$.

Решение. Из рисунка 9 видно, что искомая площадь на сегменте $[0, \pi]$ расположена над осью Ox , а на сегменте $[\pi, 2\pi]$ под осью Ox . Следовательно, достаточно вычислить площадь, ограниченную полуволной синусоиды на отрезке $[0, \pi]$, и удвоить полученный результат:

$$S = 2 \int_0^{\pi} \sin x dx = -2 \cos x \Big|_0^{\pi} = -2(-1 - 1) = 4,$$

448. Найти всю площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = 2x^2$, $y = 1 + x^2$, прямыми $x = 3$, $x = -2$ и осью Ox .

Решение. Из рисунка 10 видно, что искомая площадь может быть представлена как сумма площадей:

$$S = S_{EPMNE} + S_{NMON} + S_{OBAO} + S_{ABCD},$$

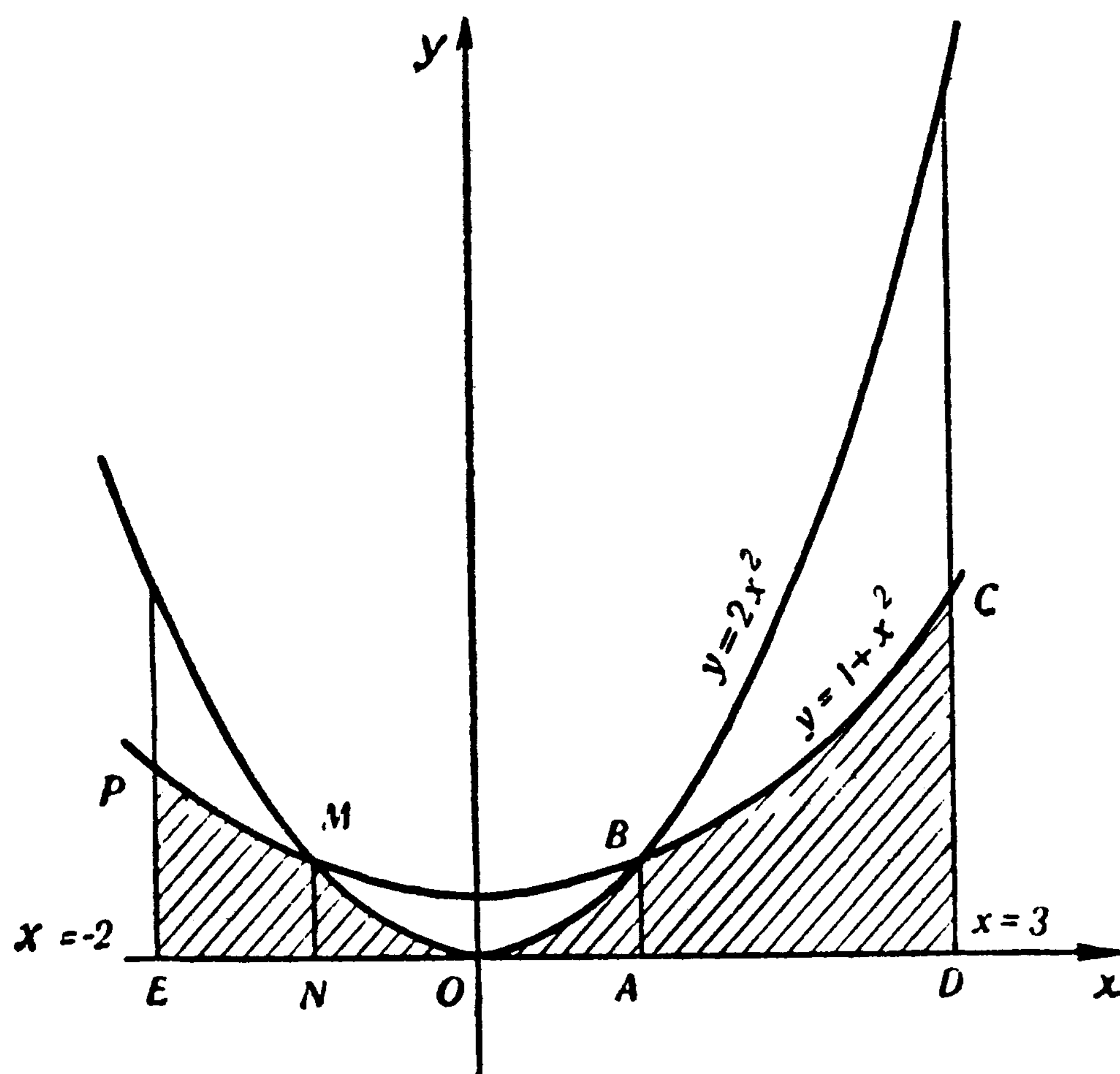


Рис. 10.

где BA и MN — перпендикуляры, опущенные из точек B и M на ось Ox .

Определим координаты точек B , C , M , P . Для этого решим следующие системы уравнений:

$$(1) \begin{cases} y = 2x^2, \\ y = 1 + x^2, \end{cases} \quad (2) \begin{cases} y = 1 + x^2, \\ x = 3, \end{cases} \quad (3) \begin{cases} y = 1 + x^2, \\ x = -2. \end{cases}$$

Решая систему (1) уравнений, найдем координаты точек B и M : $B(1, 2)$, $M(-1, 2)$.

Решая систему (2) уравнений, найдем координаты точки C : $C(3, 10)$.

Решая систему (3) уравнений, найдем координаты точки P : $P(-2, 5)$.

Найдем теперь значения промежуточных площадей:

$$S_{EPMNE} = \int_{-2}^{-1} (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-2}^{-1} = 3 \frac{1}{3},$$

$$S_{NMON} = \int_{-1}^0 2x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^0 = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$S_{OBAO} = \int_0^1 2x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$S_{ABCD A} = \int_1^3 (1 + x^2) dx = \left(x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^3 = 10 \frac{2}{3}.$$

Отсюда $S = 3 \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 10 \frac{2}{3} = 15 \frac{1}{3}.$

449. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y^2 = 9x, \quad y = 3x.$$

450. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^3, \quad y = 2x.$$

451. Найти площадь фигуры, ограниченной параболом:

$$x = y^2, \quad x = \frac{3}{4} y^2 + 1.$$

452. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y^3 = x, \quad y = 1, \quad x = 8.$$

453. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y^2 = 2px, \quad x^2 = 2py.$$

454. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y^2 = x^3, \quad x = 0, \quad y = 4.$$

455. Найти площадь круга: $x^2 + y^2 = r^2.$

456. Найти площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

457. Найти площадь, заключенную между кривыми

$$y^2 = 2x \quad \text{и} \quad y^2 + x^2 = x.$$

458. Найти площадь фигуры, ограниченной гипоциклоидой

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

459. Найти площадь фигуры, ограниченной гиперболой $xy = 8$ и прямой $x + y - 9 = 0$.

460. Вычислить площадь фигуры, заключенной между параболой $y = \frac{1}{2}x^2 - 4,5$, осями координат и прямой $x = 3,5$.

461. Найти площадь фигуры, заключенной между кривыми:

$$y^2 = 2x \text{ и } y^2 = 4x - x^2.$$

462. Найти площадь частей эллипса $x^2 + 4y^2 = 8$, отсеченных гиперболой $x^2 - 3y^2 = 1$.

463. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

464. Найти площадь фигуры, заключенной между кривыми

$$x^2 = 4ay \text{ и } y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}.$$

2. Кривые заданы параметрическими уравнениями. Если кривая, ограничивающая площадь плоской фигуры, задана параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны вместе со своими производными на $t_1 \leq t \leq t_2$, то для вычисления площади

плоской фигуры следует в определенном интеграле $S = \int_a^b y dx$

произвести замену переменной:

$$S = \int_a^b y dx = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

465. Вычислить площадь, ограниченную эллипсом:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Решение. Эллипс расположен симметрично относительно обеих осей (рис. 11), следовательно, можно вычис-

лить сначала $\frac{1}{4}$ часть площади данной фигуры. Вычислим площадь той части плоской фигуры, которая расположена в первом квадранте:

$$\frac{1}{4} S = \int_0^a y dx .$$

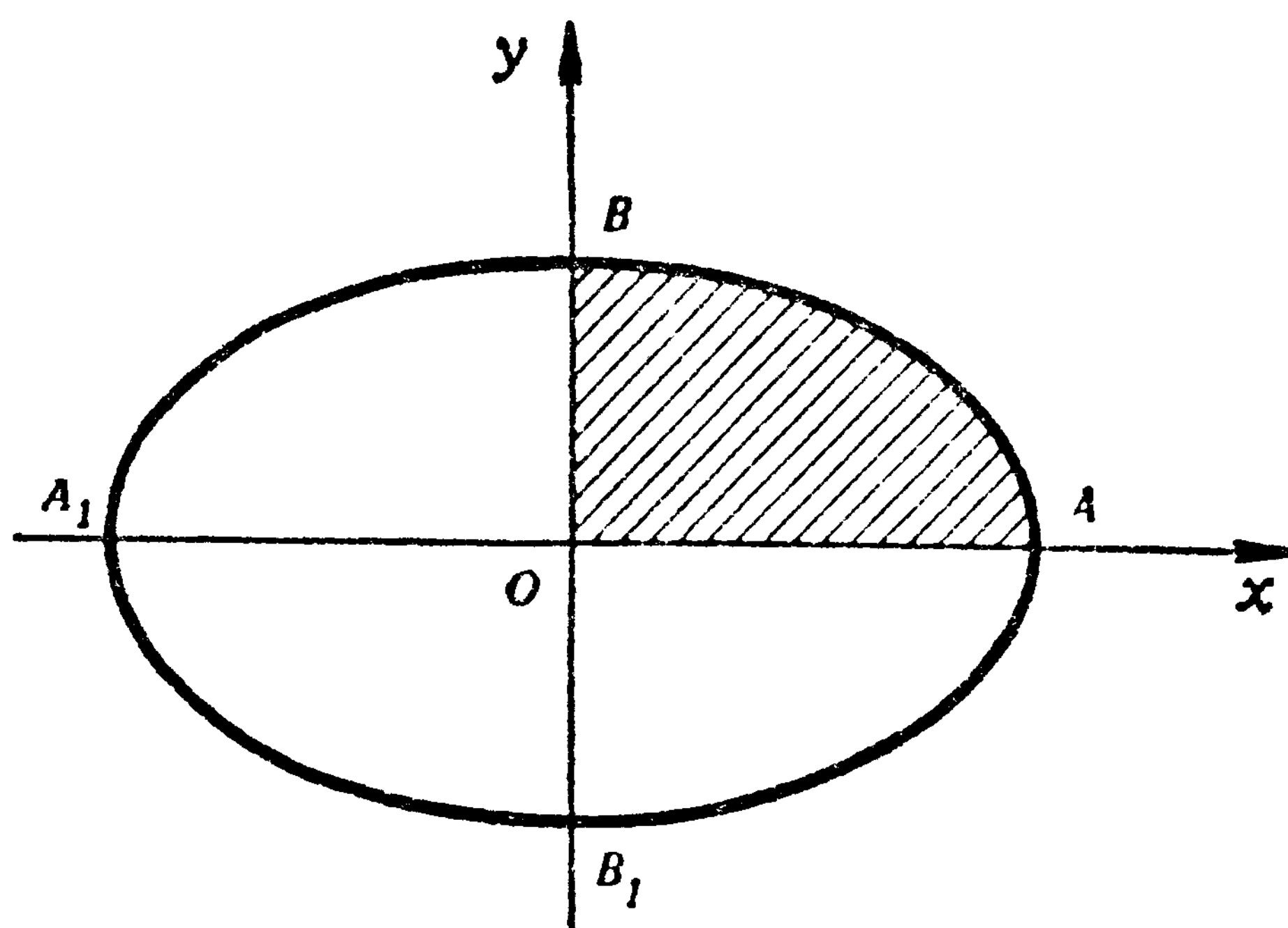


Рис. 1.

Найдем пределы интегрирования для переменной t из условий:

$$0 = a \cos t, \quad t_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$a = a \cos t, \quad t_2 = 0.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} S &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = \frac{ab}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4}. \end{aligned}$$

Вся площадь эллипса равна: $S = \pi ab$.

466. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой:

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t.$$

Решение. Искомая площадь изображена на рисунке 12. Вычислим сначала площадь той части плоской фигуры, которая расположена в первом квадранте, это будет $\frac{1}{4}$

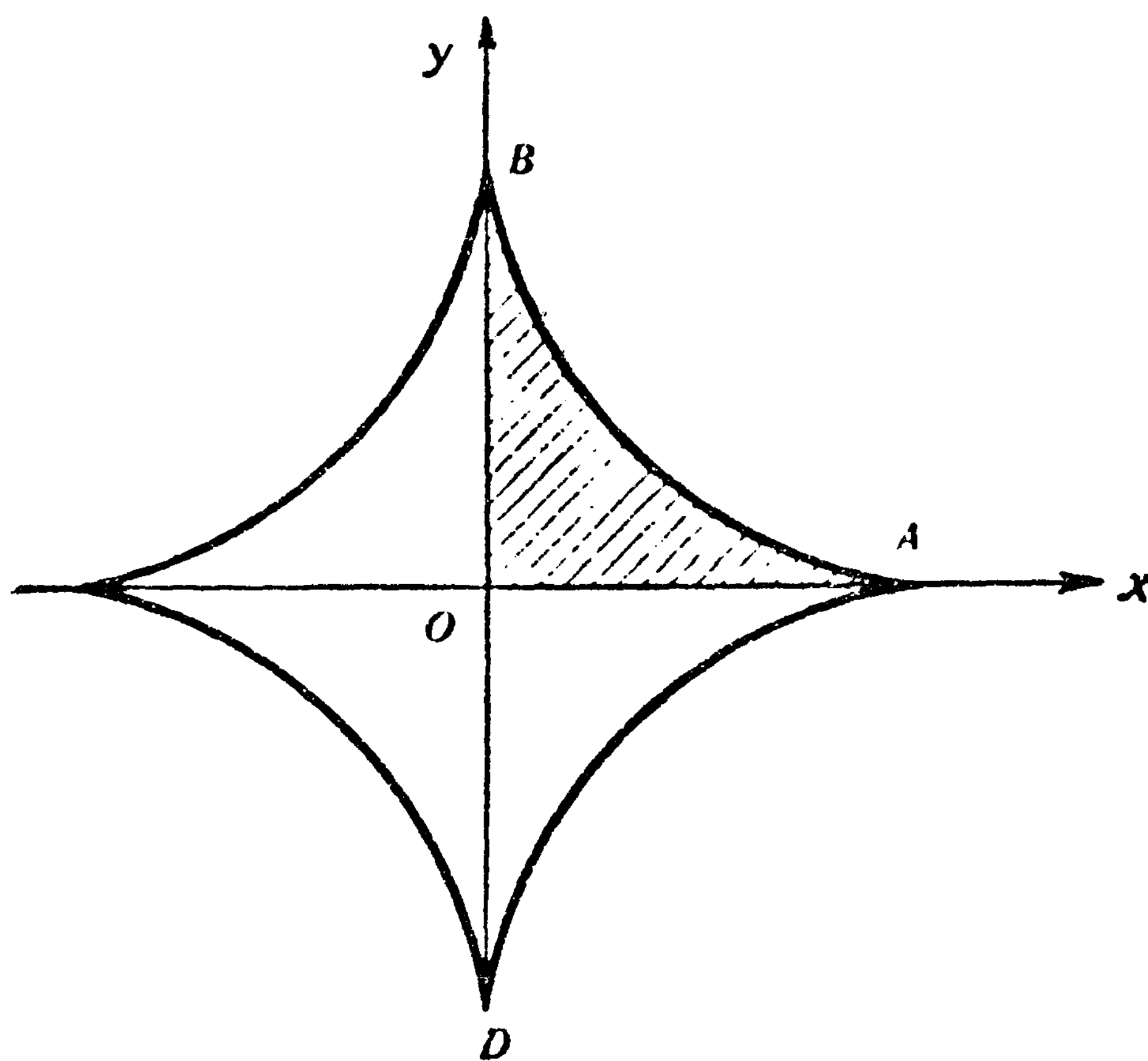


Рис. 12.

часть всей искомой площади. Найдем пределы интегрирования для переменной t из условий:

$$0 = a \cos^3 t, \quad t_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$a = a \cos^3 t, \quad t_2 = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} S &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a \sin^3 t \cdot (-3a \cos^2 t \sin t) dt = \\ &= 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cdot \cos^2 t dt = \frac{3}{4} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \sin^2 t dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{8} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \cdot (1 - \cos 2t) dt = \\
&= \frac{3}{8} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 4t}{2} - \sin^2 2t \cdot \cos 2t \right) dt = \\
&= \frac{3}{8} a^2 \left(\frac{1}{2} t - \frac{1}{8} \sin 4t - \frac{1}{6} \sin^2 2t \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \frac{3}{8} a^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{32} \pi a^2.
\end{aligned}$$

Вся площадь, ограниченная астроидой, равна:

$$S = \frac{3}{8} \pi a^2.$$

467. Вычислить площадь, ограниченную одной аркой циклоиды: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox .

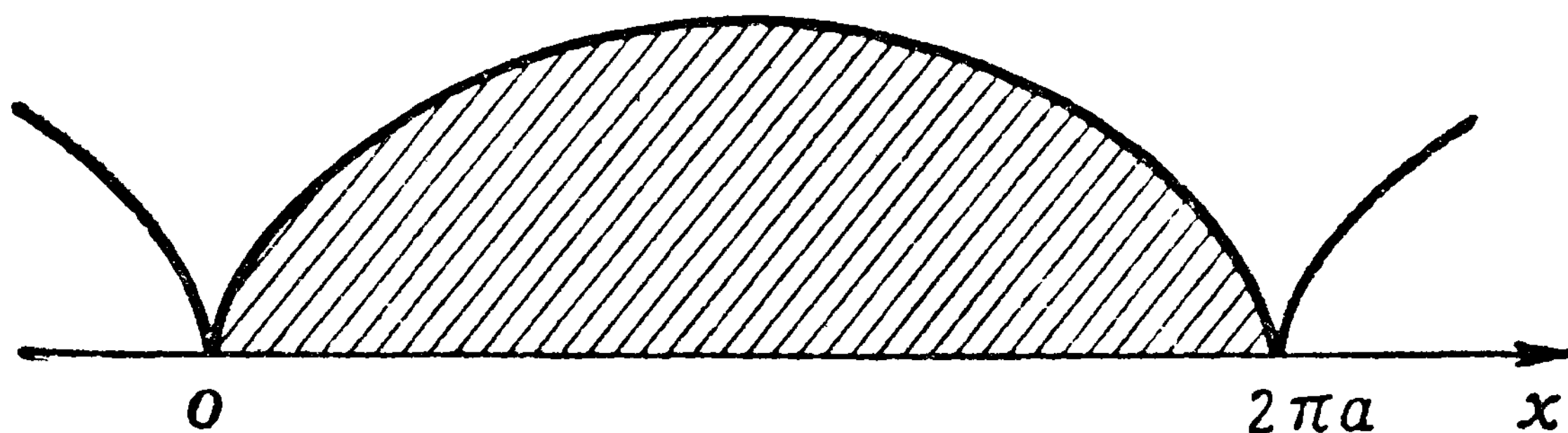


Рис. 13.

Решение. Из рисунка 13 видно, что при изменении параметра t от 0 до 2π точка (x, y) обегает всю арку циклоиды, причем x изменяется в промежутках от 0 до $2\pi a$. Следовательно,

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = \\
&= a^2 \left(t - 2 \sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = a^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi a^2.
\end{aligned}$$

468. Вычислить площадь четверти круга:

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t.$$

469. Найти площадь, ограниченную эволютой эллипса:

$$x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t,$$

$$y = -\frac{c^2}{b} \sin^3 t.$$

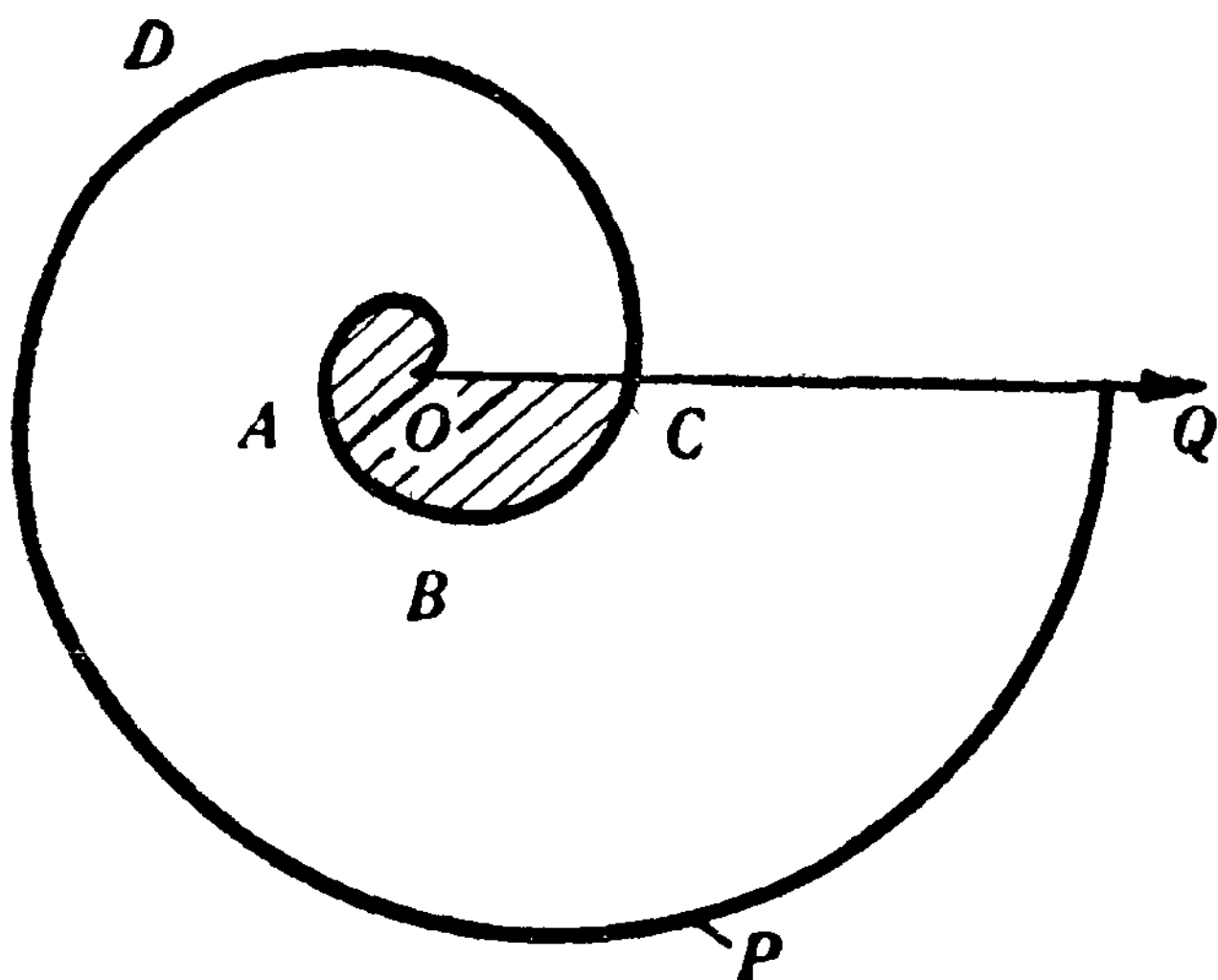


Рис. 14.

(Эволютой кривой называется геометрическое место её центров кривизны. Эволютой эллипса является деформированная астроида.)

470. Найти площадь, ограниченную кардиоидой:

$$x = a(2 \cos t - \cos 2t), \quad y = a(2 \sin t - \sin 2t).$$

3. Кривые заданы в полярной системе координат. Из теоретического курса известно, что площадь S , ограниченная неподвижным полярным радиусом r_0 , подвижным полярным радиусом r и кривой $r = f(\varphi)$, может быть вычислена по следующей формуле:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} [f(\varphi)]^2 d\varphi.$$

471. Вычислить площадь, ограниченную первым витком спирали Архимеда $r = a\varphi$ (рис. 14).

Решение. Найдем пределы интегрирования. Первый виток спирали образуется при изменении параметра t от 0 до 2π . Следовательно,

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\varphi^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2.$$

472. Найти площадь, ограниченную одним лепестком кривой $r = a \sin 2\varphi$.

Решение. Пределы интегрирования для φ найдем из условий:

$$0 \leq 2\varphi \leq \pi.$$

Отсюда

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 2\varphi \, d\varphi = \frac{a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\varphi) \, d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{4} \left(\varphi - \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{8} \pi a^2. \end{aligned}$$

473. Вычислить площадь, ограниченную кривой $r = a \cos \varphi$.

Решение. Данная кривая—окружность радиуса $\frac{a}{2}$, проходящая через полюс, расположенная симметрично относительно полярной оси. Это легко увидеть, если перейти к декартовым координатам. (Прodelайте это самостоятельно.) Тогда $S = \pi \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{1}{4} \pi a^2$.

Можно было найти искомую площадь, используя полярное уравнение данной кривой. Пределы для φ найдутся из условия $\cos \varphi \geq 0$, следовательно,

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 \varphi \, d\varphi = \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi) \, d\varphi = \end{aligned}$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{4} \pi a^2.$$

474. Вычислить площадь OAB (см. рис. 15), ограниченную полярными радиусами $r_1 = OA$ и $r_2 = OB$ и дугой логарифмической спирали $r = e^{a\varphi}$.

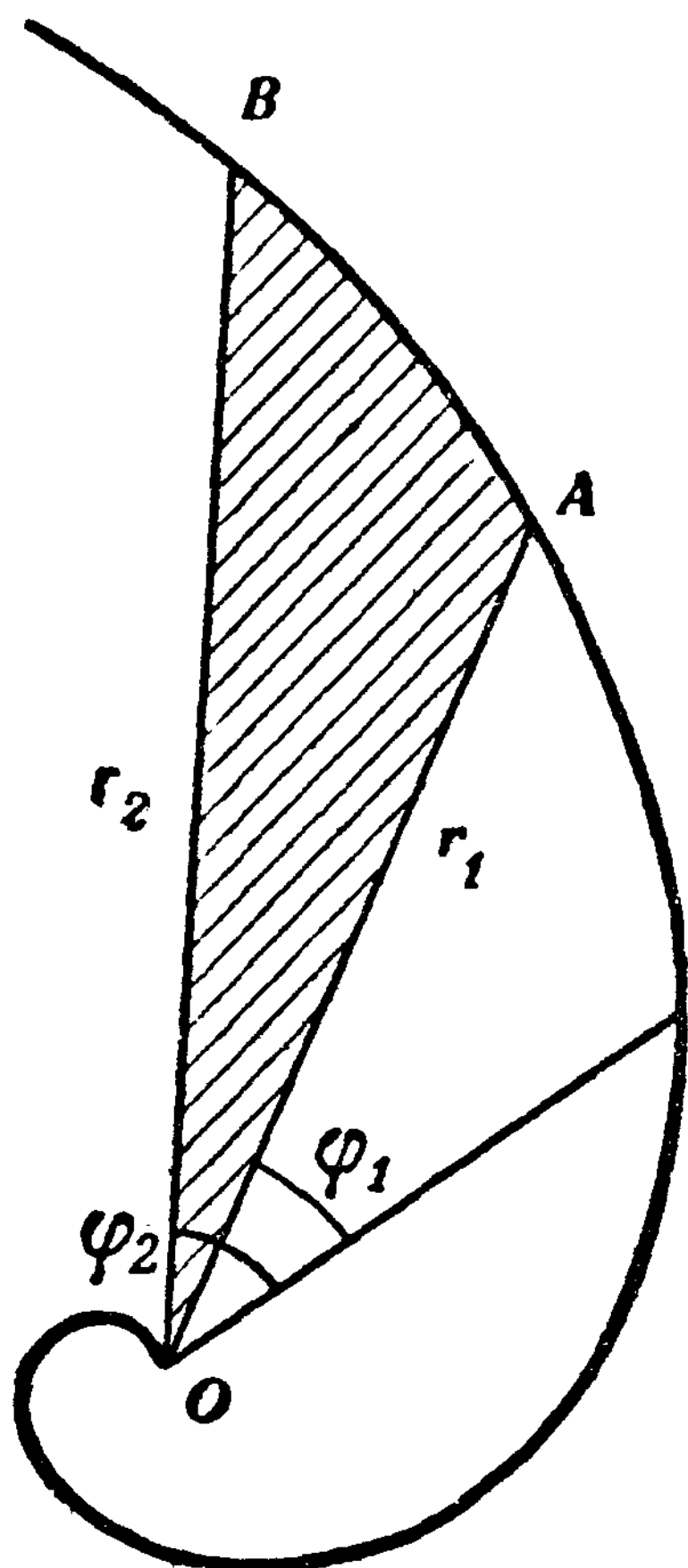


Рис. 15.

Решение. Будем считать, что полярному радиусу r_1 соответствует полярный угол φ_1 , а полярному радиусу r_2 соответствует полярный угол φ_2 . Тогда

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{2a\varphi} d\varphi = \frac{1}{4a} e^{2a\varphi} \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \\ &= \frac{1}{4a} (e^{2a\varphi_2} - e^{2a\varphi_1}) = \frac{1}{4a} (r_2^2 - r_1^2). \end{aligned}$$

475. Найти площадь петли листа Декарта: $x^3 + y^3 = 3axy$

Решение. Перейдем к полярным координатам с помощью известных соотношений:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \quad (1)$$

Уравнение данной кривой в полярных координатах примет вид:

$$\rho^3 \cos^3 \varphi + \rho^3 \sin^3 \varphi = 3a\rho \cos \varphi \rho \sin \varphi,$$

откуда

$$\rho = \frac{3a \sin \varphi \cos \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}. \quad (2)$$

Из полученного уравнения кривой видно, что $\rho = 0$ при $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$, в этом промежутке изменения полярного

угла φ кривая опишет петлю. При $\varphi \rightarrow \frac{3\pi}{4}$ или $\varphi \rightarrow \frac{7\pi}{4}$

знаменатель стремится к нулю и, следовательно, $\rho \rightarrow \infty$. Это значит, что существует асимптота данной кривой. Найдем ее, пользуясь исходным уравнением кривой в декартовых координатах. Разделив обе части равенства $x^3 + y^3 = 3axy$ на x^3 , получим $1 + \frac{y^3}{x^3} = 3a \frac{y}{x^2}$, откуда

$$\frac{y}{x} = \left(\frac{3a y}{x^2} - 1 \right)^{\frac{1}{3}}$$

и

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = -1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (y + x),$$

но

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

и, следовательно,

$$x + y = \frac{3axy}{x^2 - xy + y^2};$$

таким образом,

$$\begin{aligned} b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3axy}{x^2 - xy + y^2} = \\ &= 3a \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -a. \end{aligned}$$

Уравнение асимптоты:

$$y = kx + b.$$

Подставляя вместо k и b найденные значения, получим искомое уравнение асимптоты данной кривой:

$$y = -x - a, \text{ или } a + x + y = 0.$$

Для построения данной кривой совместим полюс с началом декартовых координат и будем считать положительное направление оси Ox совпадающим с направлением полярной оси. Составим таблицу значений φ и ρ .

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	0	$1,7a$	$2,1a$	$1,7a$	0

Соединяя теперь плавной кривой полученные точки, получим петлю данной кривой (рис. 16).

Найдем площадь, ограниченную петлей листа Декарта. Из геометрических соображений видно, что полярный угол φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Таким образом, находим:

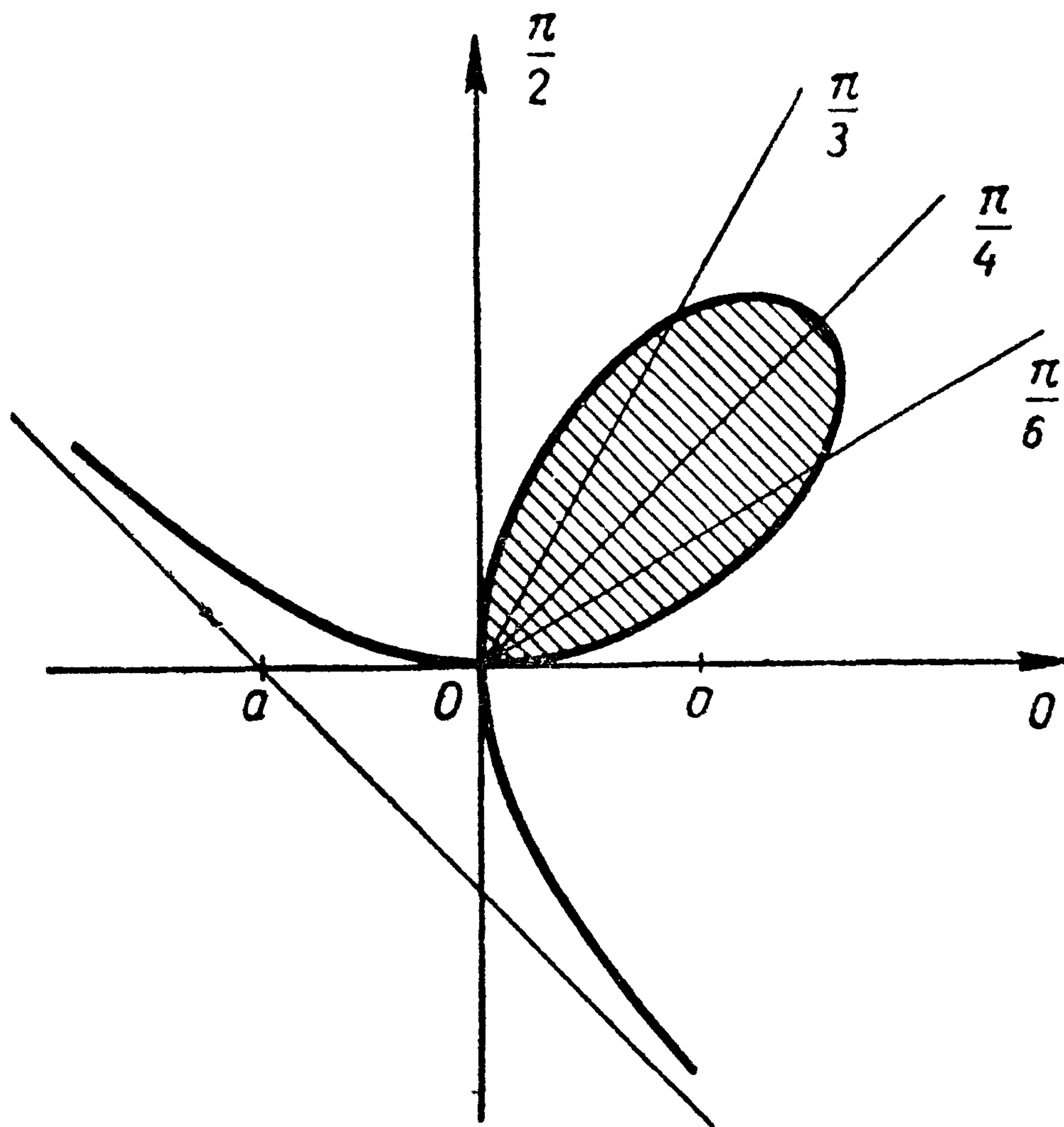


Рис. 16.

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9a^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi = \\
 &= \frac{9}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \sec^2 \varphi d\varphi}{(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)^2} = \frac{3}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \sec^2 \varphi d\varphi}{(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)^2} = \\
 &= \frac{3}{2} a^2 \cdot \left. \frac{-1}{1 + \operatorname{tg}^3 \varphi} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} a^2.
 \end{aligned}$$

476. Вычислить площадь круга $\rho = a$.

477. Найти площадь, ограниченную петлей лемнискаты, $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, построив предварительно данную кривую.

478. Найти площадь, ограниченную кривой:

$$\rho = a \cos 4\varphi.$$

479. Найти площадь, ограниченную одним лепестком кривой:

$$\rho = a \cos 2\varphi.$$

480. Найти площадь фигуры, ограниченной вторым витком спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ и отрезком полярной оси, соединяющим концы первого и второго витков (см. рис. 14).

481. Найти площадь, ограниченную улиткой Паскаля:

$$\rho = 2a(2 + \cos \varphi).$$

482. Вычислить площадь, ограниченную кардиоидой:

$$\rho = a(1 - \cos \varphi).$$

§ 2. Длина дуги плоской кривой

Предварительно изучите по учебнику Г. М. Фихтенгольца главу XII, п° п° 199, 201, 202. Разберите подробно примеры, решенные в п° 201.

1. Уравнение кривой задано в декартовой системе координат. В теоретическом курсе доказывается, что длина дуги плоской кривой $y = f(x)$ может быть вычислена при помощи определенного интеграла:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

или

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + x'^2} dy,$$

где a и b — абсциссы, а c и d — ординаты точек концов данной дуги.

483. Вычислить длину дуги параболы $y^2 = 4x$ от точки $x = 0$ до $x = 1$.

Решение. Для вычисления длины данной дуги воспользуемся второй из данных формул. Заметим, что при $x = 0$ будет $y = 0$, а при $x = 1$ будет $y = \pm 2$.

Из уравнения параболы находим $x = \frac{y^2}{4}$, следовательно, $x' = \frac{y}{2}$, отсюда

$$\begin{aligned} l &= \int_{-2}^2 \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} dy = \int_0^2 \sqrt{4 + y^2} dy = \\ &= \frac{1}{2} \left[y \sqrt{4 + y^2} + 4 \ln (y + \sqrt{4 + y^2}) \right]_0^2 = \\ &= 2 \left[\sqrt{2} + \ln (1 + \sqrt{2}) \right]. \end{aligned}$$

484. Вычислить длину дуги кривой $y = 1 - \ln \cos x$ от точки $M(0, 1)$ до точки $N\left(\frac{\pi}{4}, \ln e \sqrt{2}\right)$.

Решение. Для вычисления длины дуги воспользуемся первой из данных формул, тогда $y = 1 - \ln \cos x$, $y' = \operatorname{tg} x$, следовательно,

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \\ &= \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \right|. \end{aligned}$$

485. Вычислить длину дуги цепной линии

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

от точки $A\left[-a; \frac{a}{2e}(e^2 + 1)\right]$ до точки $B\left[a; \frac{a}{2e}(e^2 + 1)\right]$.

486. Найти длину дуги OA параболы $y^2 = 8x$, где $O(0; 0)$, $A(2; 4)$. Вычисление провести двумя способами.

487. Спрямить кривую $9ay^2 = x(x - 3a)^2$.

488. Вычислить длину дуги кривой $y^2 = \frac{2}{3}(x - 1)^3$, заключенной внутри параболы $y^2 = \frac{x}{3}$.

489. Найти длину дуги астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

490. Найти длину дуги полукубической параболы $ay^2 = x^3$ между точками $x = 0$ и $x = 2a$.

491. Найти длину дуги кривой $x = \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} \ln y$ от точки $y = 1$ до точки $y = 2$.

492. Найти длину дуги кривой $e^y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ от $x = a$ до $x = b$.

2. Кривые заданы параметрическими уравнениями или в полярной системе координат. Как известно из теоретического курса, длина дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны вместе со своими производными $x' = \varphi'(t)$ и $y' = \psi'(t)$ на $t_1 \leq t \leq t_2$, вычисляется по формуле:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt.$$

493. Вычислить длину одной арки циклоиды:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Решение. Найдем производные по аргументу t :

$$x' = a(1 - \cos t), \quad y' = a \sin t.$$

Следовательно, $x'^2 + y'^2 = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}$. Так как параметр t изменяется от 0 до 2π и в этом промежутке функции $a(1 - \cos t)$ и $a \sin t$ непрерывны, то, следовательно,

$$l = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

494. Вычислить длину дуги кривой $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ от $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Вычислим производные по аргументу t :

$$x' = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\sin t + \cos t),$$

$$y' = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t).$$

В промежутке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ эти функции непрерывны (как суммы произведений непрерывных функций).

Вычислим сумму:

$x'^2 + y'^2 = e^{2t} [(\sin t + \cos t)^2 + (\cos t - \sin t)^2] = 2e^{2t}$,
следовательно,

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} e^t dt = \sqrt{2} e^t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} (e^{\frac{\pi}{2}} - 1).$$

495. Найти длину петли кривой: $x=t^2$, $y=t - \frac{1}{3} t^3$.

Решение. Найдем точки пересечения кривой с осью Ox :

$$t - \frac{1}{3} t^3 = 0; \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \sqrt[3]{3}.$$

Так как данная кривая расположена симметрично относительно оси Ox , что видно из уравнений кривой, то

$$\begin{aligned} l &= 2 \int_0^{\sqrt[3]{3}} \sqrt{(2t)^2 + (1 - t^2)^2} dt = 2 \int_0^{\sqrt[3]{3}} (1 + t^2) dt = \\ &= 2 \left(t + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt[3]{3}} = 4 \sqrt[3]{3}. \end{aligned}$$

Рекомендуется подробнее исследовать данную функцию и построить ее график.

Из теоретического курса известно, что длина дуги кривой $\rho = f(\varphi)$, заданной в полярной системе координат, где функции $\rho = f(\varphi)$ и $\rho' = [f(\varphi)]'$ непрерывны на $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, вычисляется по формуле:

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\varphi.$$

496. Найти длину кривой: $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

Решение. Найдем пределы интегрирования. Когда угол φ изменяется от 0 до $\frac{3}{2}\pi$, полярный радиус ρ возрастает от 0 до a . Затем при изменении угла φ от $\frac{3}{2}\pi$ до 3π величина ρ убывает от a до 0. Таким образом, $0 \leq \varphi \leq 3\pi$. Найдем $\rho' = a \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cdot \cos \frac{\varphi}{3}$. Вычислим сумму:

$$\rho'^2 + \rho^2 = a^2 \sin^4 \frac{\varphi}{3} \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{3} + a^2 \sin^6 \frac{\varphi}{3} = a^2 \sin^4 \frac{\varphi}{3}.$$

Длина дуги данной кривой равна:

$$l = a \int_0^{3\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi = \frac{a}{2} \left(\varphi - \frac{3}{2} \sin \frac{2\varphi}{3} \right) \Big|_0^{3\pi} = \frac{3}{2} \pi a.$$

497. Вычислить длину кардиоиды: $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

Решение. Так как данная функция ρ — четная, то, следовательно, кривая расположена симметрично относительно полярной оси. Поэтому достаточно найти половину длины дуги кардиоиды, для которой полярный угол φ изменяется от 0 до π , и удвоить полученный результат:

$$\begin{aligned} l &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + a^2 (1 + \cos \varphi)^2} d\varphi = \\ &= 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a. \end{aligned}$$

498. Вычислить длину дуги астроида:

$$x = a \cos^3 \varphi, \quad y = a \sin^3 \varphi.$$

499. Вычислить длину дуги эволюты круга:

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t)$$

от $t = 0$ до $t = 2\pi$.

500. Вычислить длину одного витка спирали Архимеда: $r = a\varphi$.

501. Вычислить длину окружности: $r = 2a \cos \varphi$.

502. Найти длину дуги гиперболической спирали $r\varphi = a$ от точки $A(r_1, \varphi_1)$ до точки $B(r_2, \varphi_2)$.

§ 3. Объем тела произвольной формы

Предварительно изучите по учебнику Г. М. Фихтенгольца главу XII, п° п° 197, 198.

В теоретическом курсе показано, что объем тела, содержащегося между плоскостями $x = a$ и $x = b$, выражается формулой:

$$V = \int_a^b S(x) dx,$$

где $S(x)$ — площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс в точке x ($a \leq x \leq b$).

503. Вычислить объем шарового слоя, вырезанного из шара $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ плоскостями $x = 1$ и $x = 2$.

Решение. Плоскость, перпендикулярная к оси абсцисс в точке x , пересечет шар по окружности радиуса $r = \sqrt{9 - x^2}$. Площадь сечения $S(x) = \pi r^2 = \pi(9 - x^2)$ и, следовательно,

$$V = \pi \int_1^2 (9 - x^2) dx = \pi \left(9x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_1^2 = 6 \frac{2}{3} \pi.$$

504. Вычислить объем тела, ограниченного однополостным гиперболоидом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ и плоскостями $z = 0$ и $z = 1$.

Решение. Обозначим через $Q(z)$ площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси Oz . В сечении получим эллипс:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2}$$

или

$$\frac{x^2}{\left(a \sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b \sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}}\right)^2} = 1.$$

Так как полуоси этого эллипса равны $a \sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}}$ и $b \sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}}$, а, как известно, площадь эллипса равна πab , то, следовательно, $Q(z) = \pi ab \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi ab \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \pi ab \left(z + \frac{1}{3c^2} \cdot z^3\right) \Big|_0^1 = \\ &= \pi ab \left(1 + \frac{1}{3c^2}\right). \end{aligned}$$

505. От прямого кругового цилиндра радиуса a отсечен клин плоскостью, проходящей через диаметр основания и наклоненной к основанию под углом α (рис. 17). Найти объем клина.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы ось цилиндра совпала с аппликатой (см. рис. 17). Разобьем клин на слои плоскостями, перпендикулярными к оси Ox .

Тогда в сечении клина плоскостью, отстоящей на расстоянии x от начала координат, получим прямоугольный треугольник MPB , у которого катет $PB = \sqrt{a^2 - x^2}$, катет $MP = PB \cdot \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Отсюда $S(x) = \frac{1}{2} (a^2 - x^2) \operatorname{tg} \alpha$ и

$$V = 2 \int_0^a \frac{1}{2} (a^2 - x^2) \operatorname{tg} \alpha dx = \operatorname{tg} \alpha \left(a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^a = \\ = \frac{2}{3} a^3 \operatorname{tg} \alpha.$$

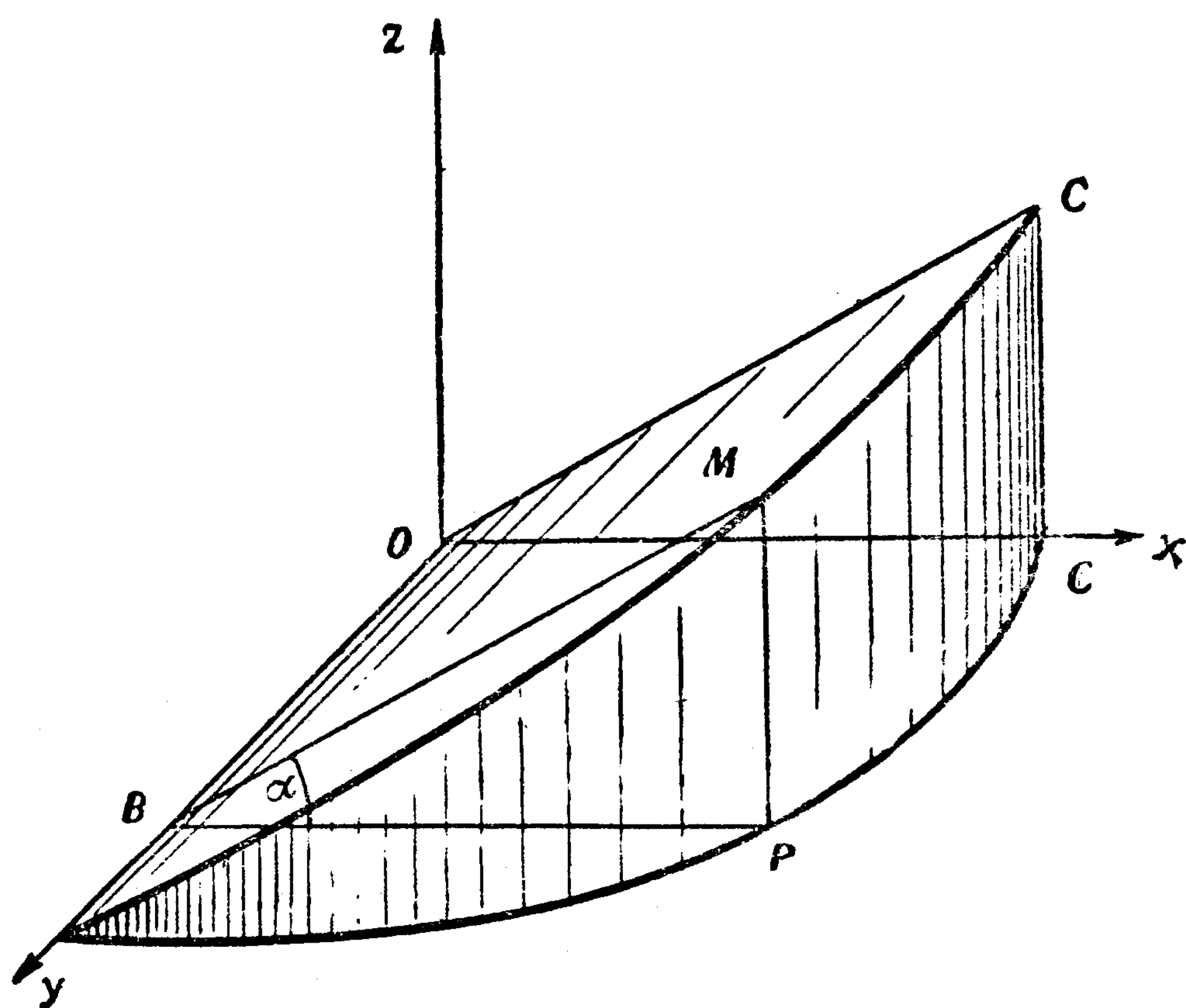


Рис. 17.

506. Вычислить путем интегрирования объем правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания a и высотой H .

507. Определить объем тела, отсеченного от круглого цилиндра плоскостью, проходящей через диаметр основания. Радиус основания равен R , высота тела равна H .

§ 4. Объемы и поверхности тел вращения

1. Объемы тел вращения. Предварительно изучите по учебнику Г. М. Фихтенгольца главу XII, п°п° 197, 198. Разберите подробно примеры, приведенные в п° 198.

508. Вычислить объем тела, образуемого вращением эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ вокруг оси Ox .

Решение. При вращении эллипса вокруг оси Ox образуется тело, называемое эллипсоидом вращения. Как известно, объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$, ординатами $x = a$, $x = b$ и осью Ox , вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Из уравнения эллипса видно, что большая его полуось равна 2, следовательно, $-2 \leq x \leq 2$. Разрешив уравнение эллипса относительно y^2 , получим $y^2 = \frac{9}{4}(4 - x^2)$. Объем эллипсоида вращения равен:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^2 \frac{9}{4}(4 - x^2) dx = \frac{9}{2} \pi \int_0^2 (4 - x^2) dx = \\ &= \frac{9}{2} \pi \left(4x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{9}{2} \pi \left(8 - \frac{8}{3} \right) = 24\pi. \end{aligned}$$

509. Найти объем тора, образованного вращением круга $x^2 + (y - b)^2 = r^2$, ($b > r$) вокруг оси Ox (рис. 18).

Решение. Искомый объем тора равен разности объемов, полученных от вращения верхнего и нижнего полукругов. Так как для верхнего полукруга $y_2 = b + \sqrt{r^2 - x^2}$, а для нижнего $y_1 = b - \sqrt{r^2 - x^2}$, то

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r (y_2^2 - y_1^2) dx = \\ &= \pi \int_{-r}^r [(b + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{r^2 - x^2})^2] dx = \\ &= \pi \int_{-r}^r 4b \sqrt{r^2 - x^2} dx = 8\pi b \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2\pi^2 r^2 b \end{aligned}$$

(см. задачу 388).

510. Вычислить объем прямого конуса, высота которого h и радиус основания r , рассматривая конус как тело вращения прямоугольного треугольника около одного из катетов.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы ось Ox совпала с высотой h (рис. 19), а вершину конуса

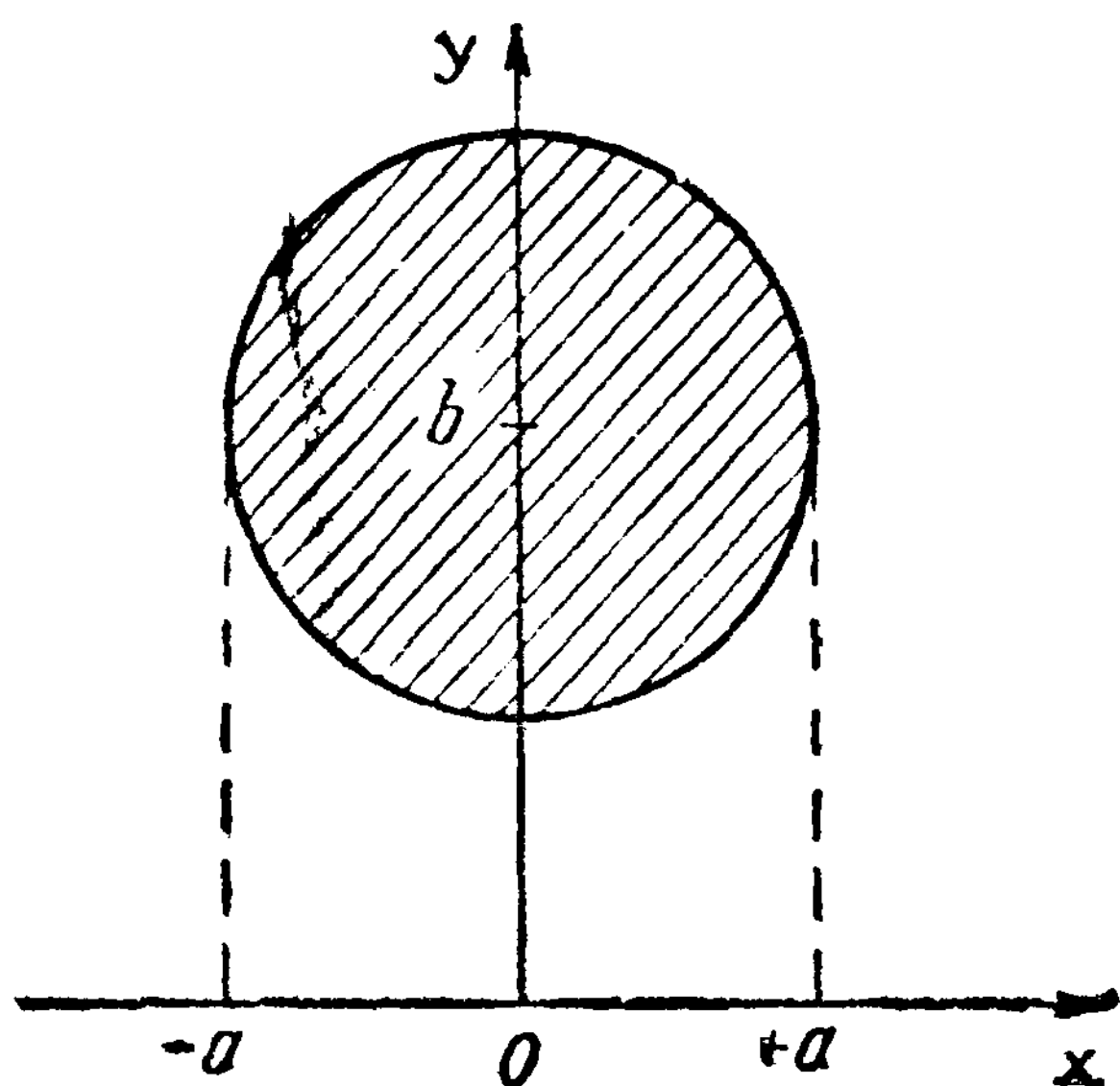


Рис. 18.

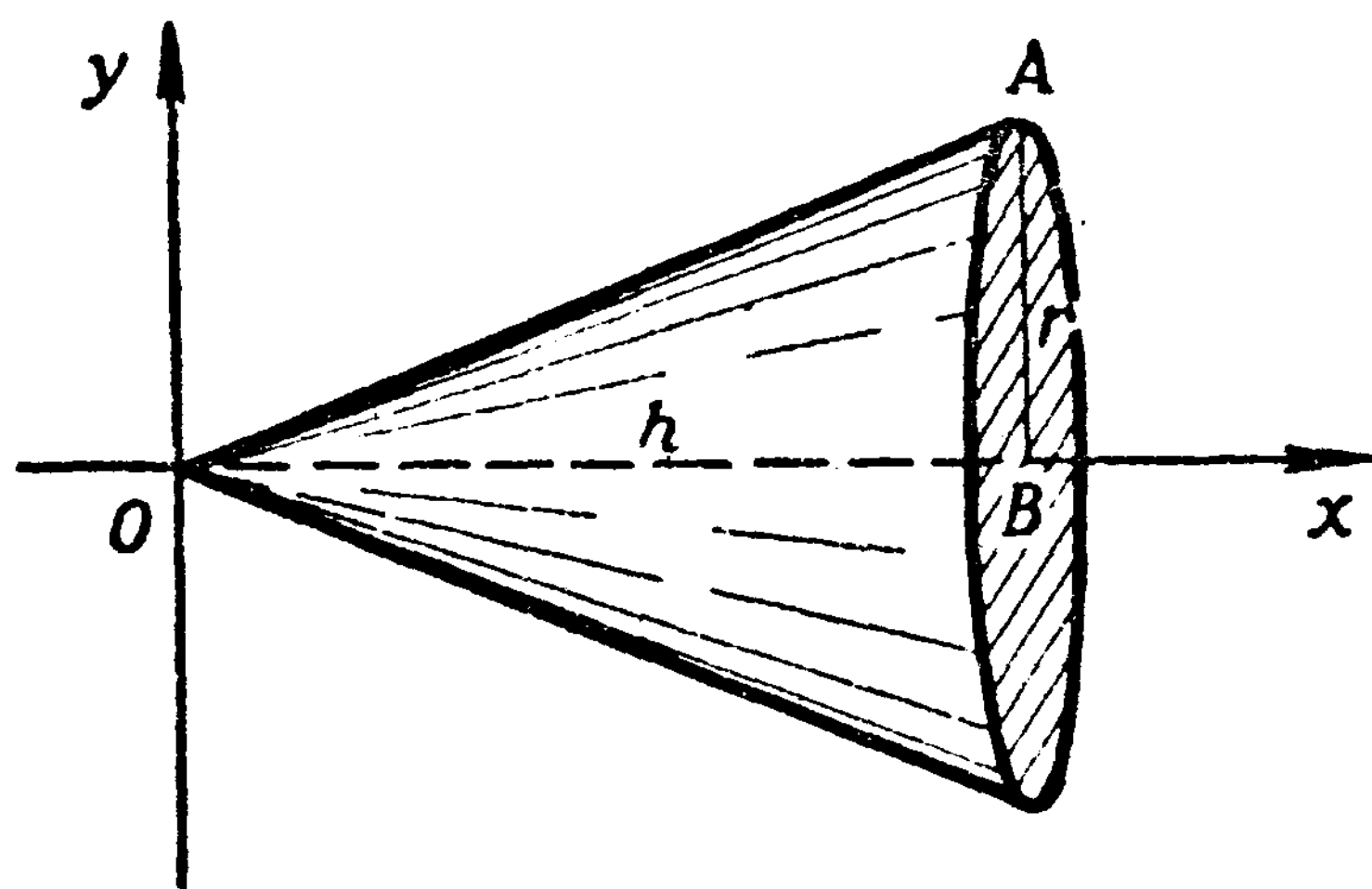


Рис. 19.

примем за начало координат. Тогда уравнение прямой OA запишется так: $y = \frac{r}{h}x$. Следовательно, объем конуса будет равен:

$$V = \pi \int_0^h y^2 dx = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

511. Вычислить объемы тел, образованных вращением около осей Ox и Oy сегмента AOB параболы $y^2 = 2px$, отсекаемого хордой AFB , проходящей через фокус параболы перпендикулярно к оси Ox (рис. 20, а, б).

Решение 1. Вычислим объем тела, получаемого при вращении сегмента AOB вокруг оси Ox , пользуясь формулой:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Найдем пределы интегрирования. Прямая AB параллельна оси Oy . Ее уравнение $x = \frac{p}{2}$. Для того чтобы найти точки пересечения этой прямой с параболой, решим совместно систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} y^2 &= 2px, \\ x &= \frac{p}{2}, \end{aligned} \right\} y_{1,2} = \pm p.$$

Получим точки $A\left(\frac{p}{2}, -p\right)$ и $B\left(\frac{p}{2}, p\right)$. Так как пря-

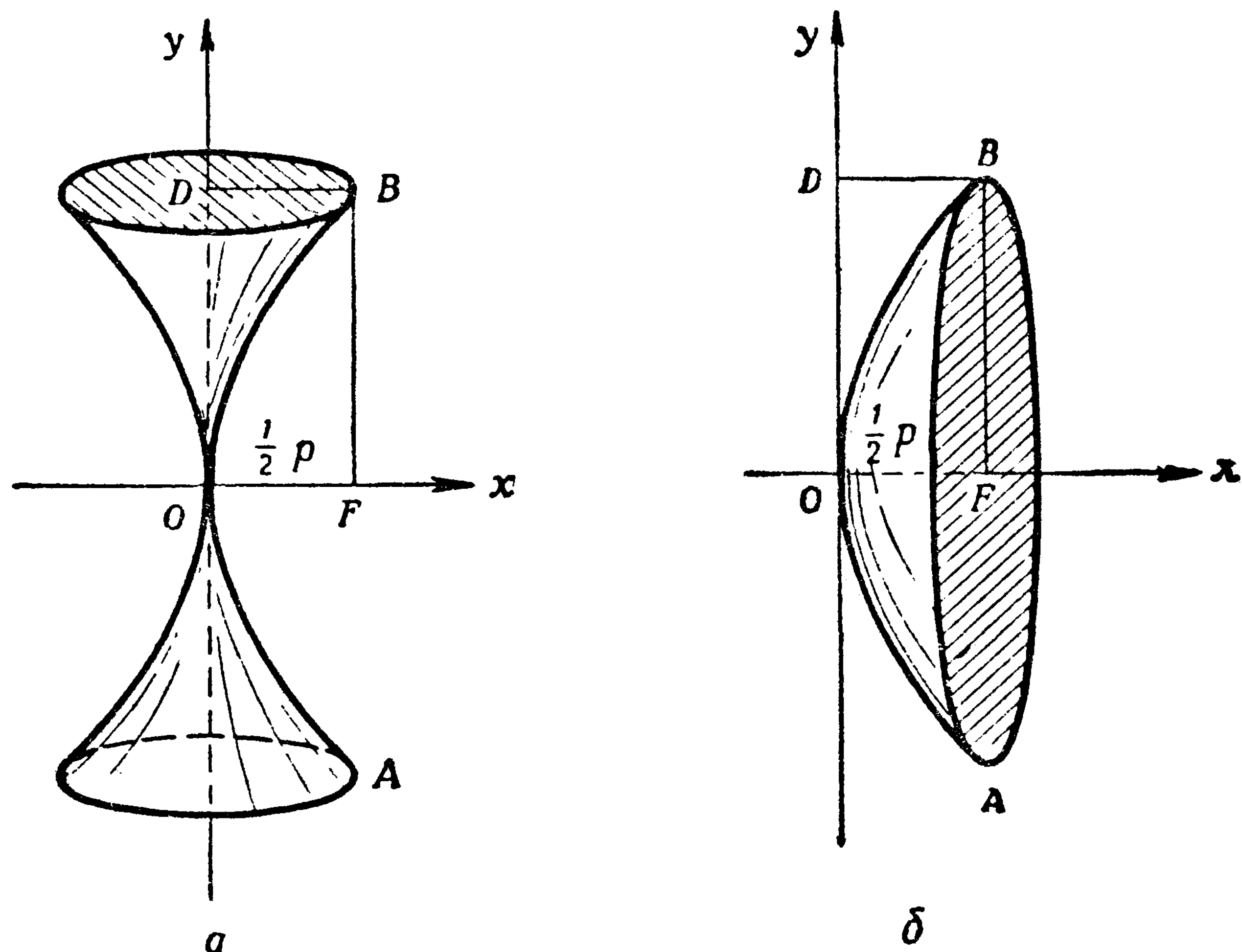


Рис. 20.

мая AB проходит через фокус параболы, то координаты точки F будут $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Следовательно,

$$V = \pi \int_0^{\frac{p}{2}} 2px \, dx = \frac{1}{4} \pi p^3.$$

2. Вычислим объем тела, получаемого при вращении сегмента AOB вокруг оси Oy . Учитывая симметрию сегмента относительно оси Ox , найдем сначала половину искомого объема. Она равна разности объемов тел, получаемых от вращения вокруг оси Oy прямоугольника $OFBD$ и криволинейного треугольника OBD . Так как объем цилиндра равен $V_2 = \pi \left(\frac{p}{2}\right)^2 p = \frac{1}{4} \pi p^3$, а объем V_1 тела,

полученного от вращения криволинейного треугольника OBD вокруг оси Oy , будет:

$$V_1 = \pi \int_0^p x^2 dy = \pi \int_0^p \frac{y^4}{4p^2} dy = \frac{\pi}{4p^2} \cdot \frac{y^5}{5} \Big|_0^p = \frac{1}{20} \pi p^3,$$

то половина искомого объема равна:

$$\frac{1}{2}V = V_2 - V_1 = \frac{1}{4}\pi p^3 - \frac{1}{20}\pi p^3 = \frac{1}{5}\pi p^3.$$

Следовательно, весь искомый объем $V = \frac{2}{5}\pi p^3$.

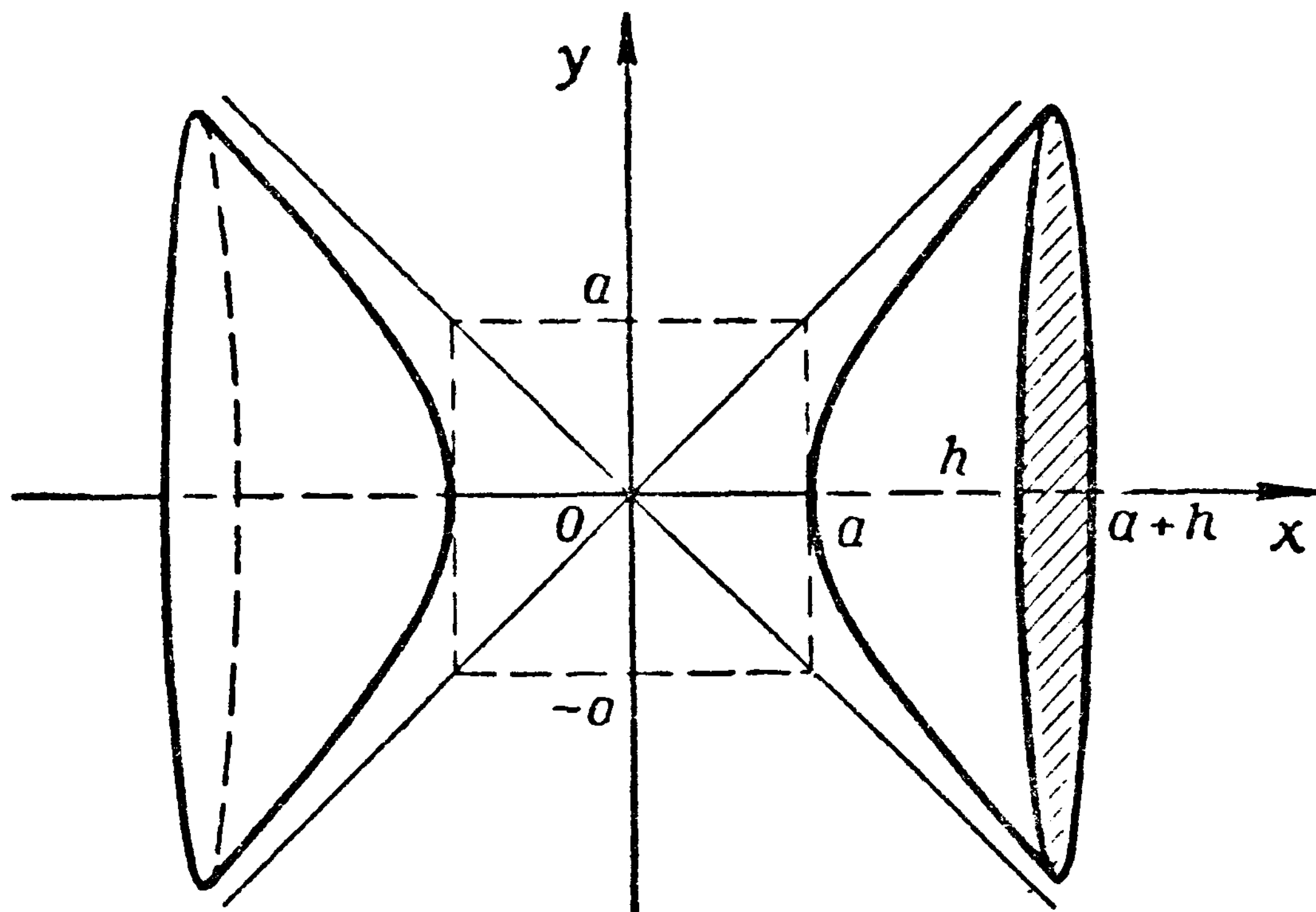


Рис. 21.

512. Фигура, ограниченная гиперболой $x^2 - y^2 = a^2$ и прямыми $x = a + h$, $x = -(a + h)$, вращается вокруг оси Ox . Найти объем тела вращения.

Решение. В результате вращения данной фигуры вокруг оси Ox образуются два тела вращения, имеющие равные объемы $V_1 = V_2$. Тогда $V = V_1 + V_2 = 2V_1$.

Найдем объем V_1 тела (рис. 21), образованного вращением площади, ограниченной правой ветвью гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$ и прямой $x = a + h$. Пределы интегрирования найдем из геометрических соображений: $x_1 = a$, $x_2 = a + h$. Таким образом,

$$V_1 = \pi \int_a^{a+h} (x^2 - a^2) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - a^2 x \right) \Big|_a^{a+h} = \frac{\pi h^2}{3} (3a + h).$$

$$V = 2V_1 = \frac{2}{3} \pi h^2 (3a + h).$$

513. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox одной полуволны синусоиды $y = \sin x$.

514. Найти объем конуса, производимого вращением вокруг оси Ox части прямой $4x - 5y + 3 = 0$, содержащейся между осями координат.

515. Криволинейная трапеция, ограниченная сверху параболой $y = x^2 + 1$, с боков — ординатами $x = -1$ и $x = 1$, снизу — осью Ox , вращается вокруг оси Ox . Найти объем полученного тела вращения.

516. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox площади, ограниченной цепной линией

$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}), \text{ ординатами } x = -a, x = a \text{ и осью } Ox.$$

517. Прямой параболический сегмент, основание которого a , а высота R , вращается вокруг основания. Определить объем полученного тела вращения.

518. Найти объем цирка, осевое сечение которого — парабола. Высота цирка 30 м. Диаметр основания 50 м.

519. Найти объем тела, образованного вращением кривой $y^2 = \frac{ax^3 - x^4}{a^2}$ вокруг оси абсцисс.

520. Вычислить объем тела, полученного вращением астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ вокруг оси Oy .

521. На кривой $y = x^3$ взяты две точки A и B , абсциссы которых соответственно $a = 1$ и $b = 2$. Найти объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции $aABb$ вокруг оси Ox .

522. Найти объем тела, производимого вращением площади, ограниченной дугой циклоиды $x = a(\varphi - \sin \varphi)$, $y = a(1 - \cos \varphi)$ и осью Ox вокруг ее основания.

523. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси ординат дуги OM циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, ограниченной точками $O(0, 0)$ и $M(\pi a, 2a)$.

524. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, полученной при вращении линии $x = a \sin^3 t$, $y = b \cos^3 t$ вокруг оси абсцисс.

2. Площадь поверхности тела вращения. Предварительно изучите по учебнику Г. М. Фихтенгольца главу XII, п° 205. В теоретическом курсе показано, что площадь поверхности тела вращения определяется по формуле:

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

525. Определить площадь поверхности параболоида, образованного вращением дуги параболы $y^2 = 2x$ вокруг оси Ox от $x = 0$ до $x = 2$.

Решение. В нашем случае $f(x) = \sqrt{2x}$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$. Поэтому

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^2 \sqrt{2x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2x}} dx = 2\pi \int_0^2 \sqrt{2x + 1} dx = \\ &= \frac{2\pi}{3} (2x + 1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{2\pi}{3} (5^{\frac{3}{2}} - 1). \end{aligned}$$

526. Найти площадь поверхности шара радиуса R .

Решение. Поместим начало координат в центре шара. Будем рассматривать поверхность шара как поверхность, полученную в результате вращения полуокружности $x^2 + y^2 = R^2$ вокруг оси Ox . Тогда площадь поверхности шара найдется по формуле:

$$P = 2\pi \int_{-R}^R y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Так как $y = (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, то $y' = -x(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $1 + y'^2 = 1 + x^2(R^2 - x^2)^{-1} = \frac{R^2}{R^2 - x^2}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot R \cdot (R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= 2\pi \int_{-R}^R R dx = 2\pi \cdot R \cdot x \Big|_{-R}^R = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

527. Найти площадь поверхности эллипсоида, образованного вращением эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ вокруг оси Ox .

Решение. Из уравнения эллипса имеем: $y = \frac{5}{2} \sqrt{4 - x^2}$. Найдем производную: $y' = -\frac{5}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$.

Тогда $1 + y'^2 = \frac{16 + 21x^2}{4(4 - x^2)}$. Так как полуось эллипса $a = 2$, то $-a \leq x \leq a$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_{-2}^2 \frac{5}{2} \sqrt{4 - x^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{16 + 21x^2}{4 - x^2}} dx = \\ &= \frac{5\pi}{2} \int_{-2}^2 \sqrt{16 + 21x^2} dx = 5\pi \int_0^2 \sqrt{16 + 21x^2} dx = \\ &= \int_0^2 \frac{16 + 21x^2}{\sqrt{16 + 21x^2}} dx = \\ &= \frac{2}{\sqrt{21}} \left[5\sqrt{21} + 4 \ln(2\sqrt{21} + 10) - 4 \ln 4 \right]. \end{aligned}$$

Если кривая задана параметрически, то, заменяя переменную под знаком определенного интеграла, получим для площади поверхности следующую формулу:

$$P = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt.$$

528 Вычислить площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ вокруг оси Ox (см. рис. 13).

Решение. Найдем:

$$x_t' = a(1 - \cos t), \quad y_t' = a \sin t.$$

Тогда $x_t'^2 + y_t'^2 = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}$. Искомая поверхность равна:

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot 2a \sin \frac{t}{2} dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = \\ &= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2} \right) \cdot \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= 8\pi a^2 \left(-2 \cos \frac{t}{2} + \frac{2}{3} \cos^3 \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{64}{3} \pi a^2. \end{aligned}$$

529. Найти площадь поверхности, образованной вращением петли кривой $x = t^2$, $y = \frac{t}{3} (t^2 - 3)$ вокруг оси Ox .

Решение. Построим данную кривую. Найдем точки пересечения ее с осями координат.

При $y = 0$ находим $t = 0$ и $t = \pm \sqrt{3}$. Следовательно, $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$, т. е. кривая пересекает ось Ox в двух точках $O(0, 0)$ и $A(3, 0)$.

При $x = 0$ находим $t = 0$, следовательно, $y = 0$. Мы получили ту же точку $O(0, 0)$.

При любых вещественных значениях параметра t будут вещественны x и y . Так как x — четная функция параметра t , y — нечетная функция параметра t , то график расположен симметрично относительно оси Ox .

Исследуем данную функцию на экстремум. Находим производную:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t^2 - 1}{2t}.$$

Легко видеть, что $y = 0$ при $t = \pm 1$ и, следовательно, $y = \mp \frac{2}{3}$; когда $x = 1$; $y' \rightarrow \infty$, когда $t \rightarrow 0$, следовательно, когда $x \rightarrow 0$, то и $y \rightarrow 0$. Это значит, что в начале координат касательная к данной кривой вертикальна. В точке $A(3; 0)$ будет $y' = \frac{1}{\sqrt{3}}$, это значит, что касательная к данной кривой в этой точке образует с положительным направлением оси Ox угол в 30° .

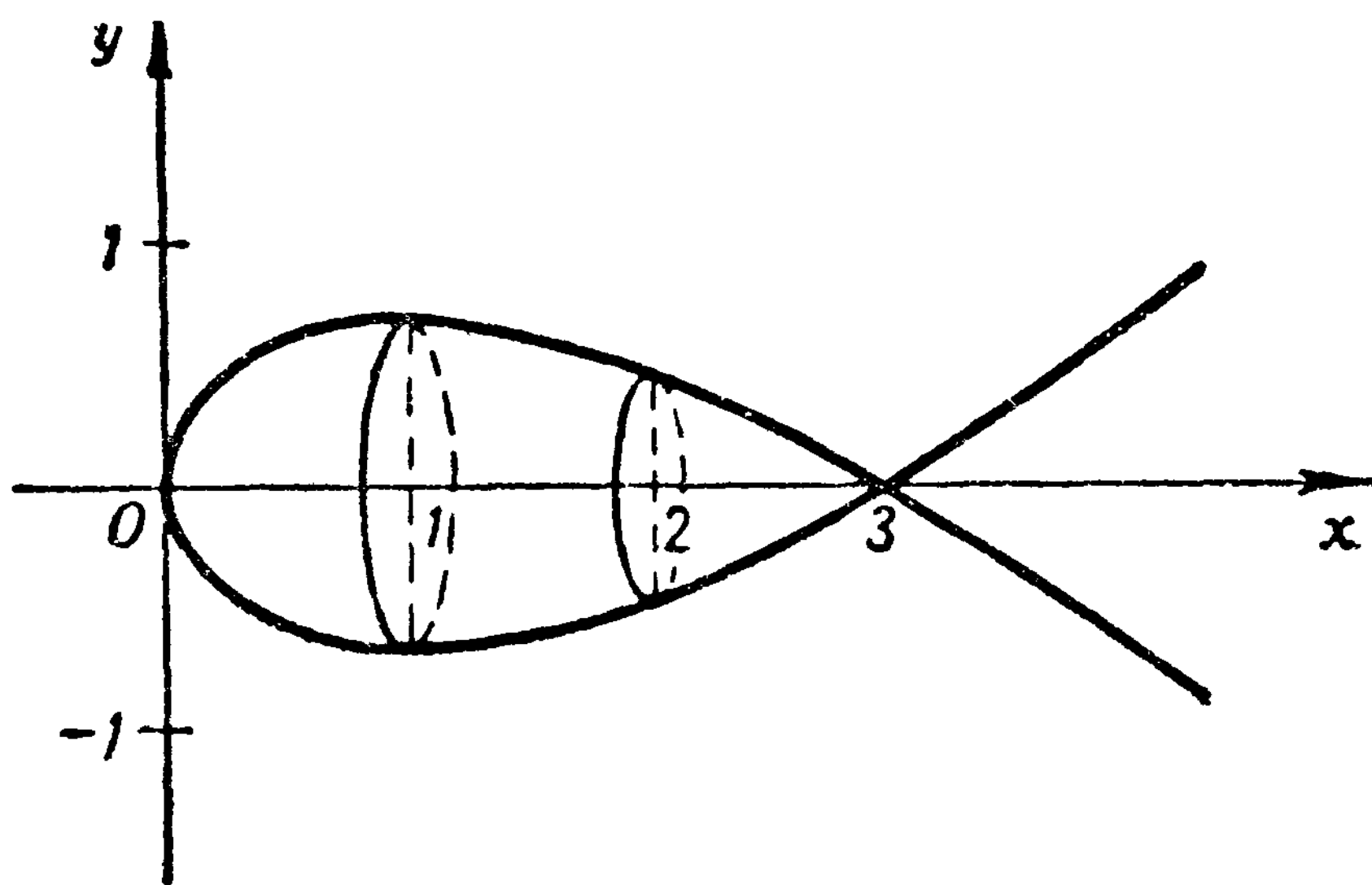


Рис. 22.

Полученных данных достаточно для построения графика данной функции (рис. 22).

Найдем площадь данной поверхности. Имеем:

$$x' = 2t, y' = t^2 - 1; x'^2 + y'^2 = (1 + t^2)^2.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^3 y \sqrt{1 + y'^2} dx = 2\pi \int_{\sqrt{3}}^0 \frac{t}{3} (t^2 - 3) (1 + t^2) dt = \\ &= \frac{2}{3} \pi \int_{\sqrt{3}}^0 (t^5 - 2t^3 - 3t) dt = \frac{2}{3} \pi \left(\frac{t^6}{6} - \frac{t^4}{2} - \frac{3t^2}{2} \right) \Big|_{\sqrt{3}}^0 = \\ &= -\frac{2}{3} \pi \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{2} - \frac{9}{2} \right) = 3\pi. \end{aligned}$$

530. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги синусоиды $y = \sin x$ от точки $x = 0$ до точки $x = \pi$.

531. Вычислить площадь поверхности конуса с высотой h и радиусом r .

532. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ вокруг оси Ox .

533. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением петли кривой $18y^2 = x(6 - x)^2$ вокруг оси Ox .

534. Найти поверхность тора, производимого вращением круга $x^2 + (y - 3)^2 = 4$ вокруг оси Ox .

535. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением окружности $x = a \cos t, y = a \sin t$ вокруг оси Ox .

536. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением петли кривой $x = 9t^2, y = 3t - 9t^3$ вокруг оси Ox .

537. Найти площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t$ вокруг оси Ox от $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$.

538. Показать, что поверхность, производимая вращением дуги циклоиды $x = a(\varphi - \sin \varphi), y = a(1 - \cos \varphi)$ вокруг оси Oy , равна $16\pi^2 a^2$.

539. Найти поверхность, полученную вращением кардиониды $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ вокруг полярной оси.

540. Найти площадь поверхности, образованной вращением лемнискаты $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ вокруг полярной оси.

Дополнительные задачи к главе IV

Площади плоских фигур

541. Найти всю площадь области, ограниченной кривой $y = \frac{1}{10}(x^4 - 13x^2 + 36)$ и осью Ox .

542. Найти площадь области, ограниченной кривой $y = x^3 - 12x$ и осью Ox .

543. Найти часть площади области, расположенной в первом квадранте и ограниченной кривой $y = \cos^3 x + \sin^3 x$ и осями координат.

544. Найти площадь области, содержащейся внутри петли: $x = t^2$, $y = t - \frac{1}{3}t^3$.

545. Найти площадь области, ограниченной одной петлей кривой: $x = a \sin 2t$, $y = a \sin t$.

546. Найти площадь области, содержащейся внутри петли:

$$x = \frac{t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{t(1 - t^2)}{1 + t^2}.$$

547. Найти площадь области, ограниченной кривой $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ и осью Ox .

548. Найти площадь области, ограниченной кривой $y = x \sqrt{3 - x}$ и осью Ox .

549. Найти площадь области, ограниченной осью Ox , прямой $x = 1$ и кривой $y = x \sqrt{1 - x^2}$.

550. Найти площадь области, ограниченной кривыми $y = \sin^3 x$, $y = \cos^3 x$ $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right)$ и осью Oy .

Вычисление длины дуги

551. Найти длину дуги кривой $y = 6 \sqrt{x^3}$ от точки $A(0; 0)$ до точки $B(1; 6)$.

552. Найти длину дуги CD кривой $x = \sqrt{r^2 - y^2}$, где $C(r, 0)$, $D(0, r)$. Дать геометрическую иллюстрацию.

553. Найти длину дуги OA кривой $y = a \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2}$, где $O(0, 0)$, $A\left(\frac{a}{2}, a \ln \frac{4}{3}\right)$.

554. Найти длину дуги AB кривой $y = e^x$, где $A(0; 1)$, $B(1; 2)$.

555. Найти длину дуги AB кривой $y = \ln \sin x$, где $A\left(\frac{\pi}{3}; \ln \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{2\pi}{3}; \ln \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

556. Найти длину дуги кривой $y^2 = \frac{4}{9}(2 - x)^3$, отсеченной прямой $x = -1$.

557. Найти длину дуги кривой $y = \ln(1 - x^2)$ от $x = -\frac{1}{3}$ до $x = \frac{1}{3}$.

Объем тела вращения

558. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox площади, ограниченной кривой $y^2 = (1 - x^2)^3$.

559. Найти объем тела, полученного от вращения вокруг оси Ox площади, ограниченной кривой $9y^2 = x^3(6 - x)$.

560. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy площади, ограниченной кривой $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ и прямыми $y = \pm \sqrt{2}$.

561. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy площади, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$.

562. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy площади, ограниченной кривой $(y^2 - b^2)^2 = a^3 x$ и отрезком оси Oy .

563. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox площади, ограниченной кривой $y^2 = \frac{ax(x - 3a)}{x - 4a}$.

564. Круг радиуса 2 с центром в точке $(7; 0)$ вращается вокруг оси Oy . Определить объем полученного тела вращения.

565. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox площади, расположенной в первом квадранте и

ограниченной кривой $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t$ (эволюта эллипса).

Площадь поверхности вращения

566. Найти площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой $y^2 = 4 + x$, отсеченной прямой $x = 2$.

567. Найти площадь поверхности шаровой чаши, полученной при вращении круга $x^2 + y^2 - 2rx = 0$ вокруг оси Ox в пределах от 0 до h .

568. Найти площадь поверхности катеноида, образованного вращением вокруг оси абсцисс цепной линии $y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ от точки $x = -a$ до точки $x = a$ ($a > 0$).

569. Найти площадь поверхности эллипсоида, образованного вращением эллипса $4x^2 + y^2 = 4$ вокруг оси Oy .

570. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox петли кривой $9ay^2 = x(3a - x)^2$.

571. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox кривой $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

572. Найти площадь поверхности, образованной вращением $\rho = 2a \sin \varphi$ вокруг полярной оси.

ГЛАВА V

ПРИЛОЖЕНИЯ К ВОПРОСАМ ФИЗИКИ

§ 1. Вычисление статических моментов и моментов инерции

Предварительно изучите по учебнику Г. М. Фихтенгольца главу XII, п° 206, 207. Рассмотрите внимательно примеры, приведенные в указанных пунктах.

573. Найти статический момент полуокружности относительно диаметра.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы центр окружности совпадал с началом координат, а диаметр, относительно которого мы ищем статический момент, совпадал с осью Ox . Тогда статический момент полуокружности относительно диаметра выразится следующей формулой:

$$K_x = \int_0^l y \, dl,$$

где $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} \, dx$ — дифференциал дуги кривой $y = f(x)$.

В выбранной системе координат уравнение полуокружности запишется так: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Тогда

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad 1 + y'^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2}.$$

Следовательно,

$$K_x = \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 2R \int_0^R dx = 2R x \Big|_0^R = 2R^2.$$

574. Найти статические моменты относительно осей Ox и Oy дуги эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$), расположенной в первом квадранте.

Решение. Найдем статический момент дуги эллипса относительно оси Ox . Из уравнения эллипса имеем $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ (мы берем перед корнем знак $+$, так как по условию кривая расположена в первом квадранте).

Следовательно,

$$y' = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{a^4 - x^2(a^2 - b^2)}{a^2 - x^2};$$

$$dl = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2 - x^2}} dx.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} K_x &= \int_0^l y dl = \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2 - x^2}} dx = \\ &= \frac{b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} dx = \\ &= b \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \int_0^a \sqrt{\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)^2 - x^2} dx = \\ &= \frac{b \sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \left[\frac{x}{2} \sqrt{\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)^2 - x^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)^2 \arcsin \frac{x \sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} \right]_0^a = \\ &= \frac{b^2}{2} + \frac{a^2 b}{2 \sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \end{aligned}$$

Найдем статический момент дуги эллипса относительно оси Oy . Из уравнения эллипса имеем:

$$x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}; \quad dl = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{b^4 + y^2(a^2 - b^2)}{b^2 - y^2}} dy.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} K_y &= \int_0^b \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \cdot \frac{1}{b} \sqrt{\frac{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}{b^2 - y^2}} dy = \\ &= \frac{a \sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} \int_0^b \sqrt{\left(\frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)^2 + y^2} dy = \\ &= \frac{a \sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} \left[\frac{y}{2} \sqrt{\left(\frac{b^2}{a^2 - b^2}\right)^2 + y^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)^2 \ln \left(y + \sqrt{y^2 + \left(\frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)^2}\right) \right]_0^b = \\ &= \frac{a^2}{2} + \frac{b^4}{2(a^2 - b^2)} \ln \frac{\sqrt{a^2 - b^2} + a}{a}. \end{aligned}$$

575. Найти статический момент прямоугольника с основанием a и высотой h относительно его сторон.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы ось Ox совпадала с основанием, а начало координат — с прилегающей к основанию стороной. Тогда статический момент плоского тела относительно оси Ox будет вычисляться по формуле:

$$K_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx.$$

В нашем случае $y = h$,

$$K_x = \frac{1}{2} \int_0^a h \cdot h dx = \frac{1}{2} \cdot h^2 x \Big|_0^a = \frac{1}{2} ah^2.$$

Статический момент относительно оси Oy вычисляется по формуле:

$$K_y = \int_a^b xy dx.$$

В данном случае:

$$K_y = \int_0^a x h dx = \frac{h}{2} x^2 \Big|_0^a = \frac{1}{2} a^2 h.$$

576. Найти статический момент фигуры, представленной на рисунке 23 относительно стороны OD , если известно, что $OA = 3$ см, $AB = 5$ см, $BC = 5$ см, $OF = 8$ см, а дуга CD есть четвертая часть окружности радиуса $CF = FD = 3$ см.

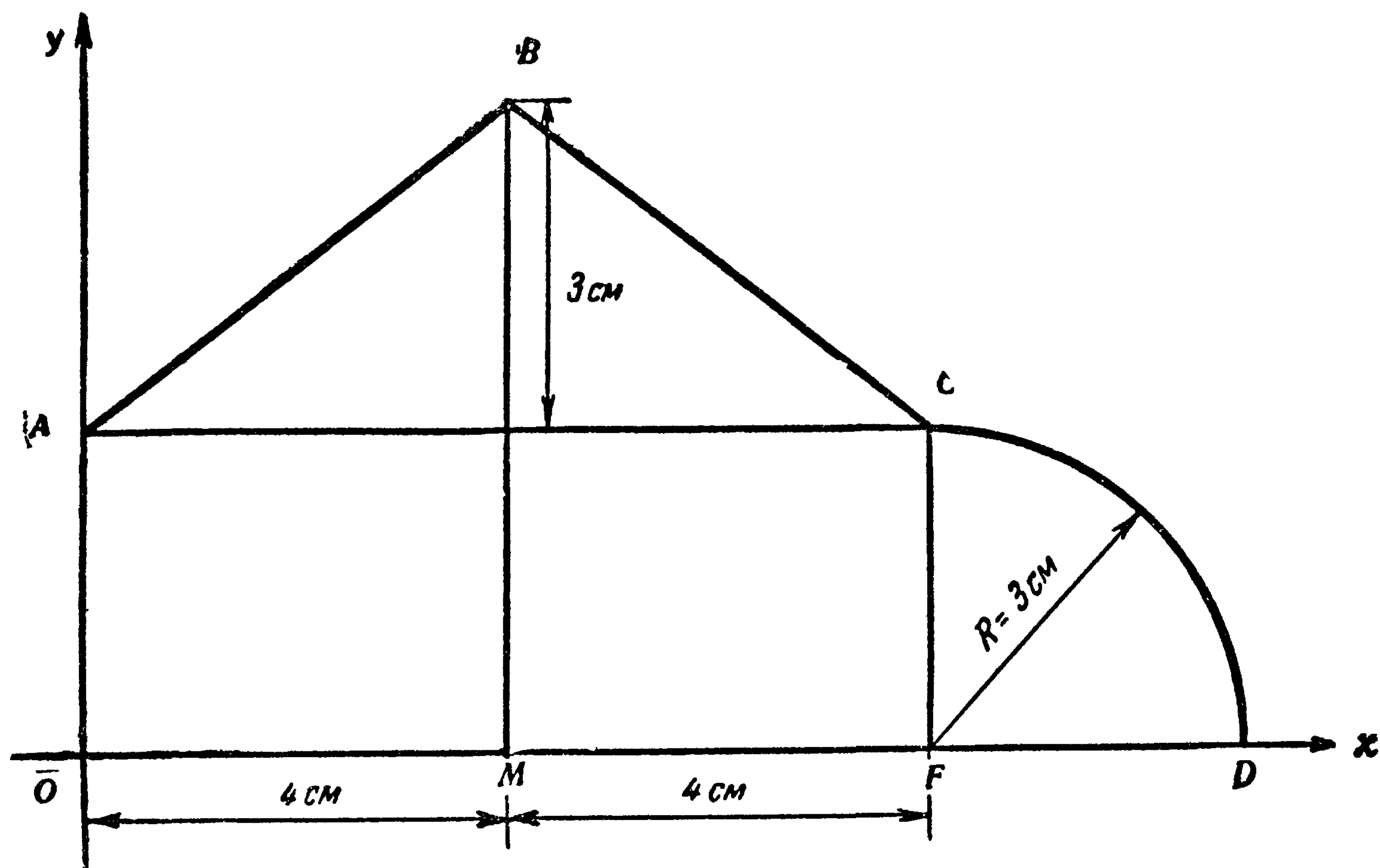


Рис. 23.

Решение. Как видно из рисунка 23, данная фигура имеет сложную форму. Разобьем это тело на простые геометрические фигуры и применим затем теорему: статический момент фигуры относительно некоторой оси равен сумме статических моментов ее частей относительно той же оси.

Выберем систему координат, как показано на рисунке 23. Легко видеть, что данную фигуру можно рассматривать как сумму двух трапеций $OABM$ и $MBCF$ и одной четвертой части круга.

Координаты точек A, B, C, D, F определить легко:
 $A(0, 3)$, $B(4, 6)$, $C(8, 3)$, $D(11, 0)$, $F(8, 0)$.

Найдем уравнения прямых AB и BC , как уравнения прямых, проходящих через две данные точки:

уравнение прямой AB : $y = \frac{3}{4}x + 3$,

уравнение прямой BC : $y = 9 - \frac{3x}{4}$.

Так как центр F окружности лежит на оси Ox и отстоит от начала координат на расстоянии $OF = 8$, то уравнение окружности будет $(x-8)^2 + y^2 = 9$.

Учитывая все вышеизложенное, найдем:

$$\begin{aligned} K_x &= \frac{1}{2} \int_0^4 \left(\frac{3}{4}x + 3 \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_4^8 \left(9 - \frac{3x}{4} \right)^2 dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_8^{11} \left[9 - (x-8)^2 \right] dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}x + 3 \right)^3}{3} \Big|_0^4 - \\ &- \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\left(9 - \frac{3x}{4} \right)^3}{3} \Big|_4^8 + \frac{1}{2} \left[9x - \frac{(x-8)^3}{3} \right]_8^{11} = \\ &= 42 + 42 + 9 = 93. \end{aligned}$$

577. Найти статический момент тела, ограниченного одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, относительно оси Ox .

Решение. Так как параметр t для одной арки циклоиды изменяется от 0 до 2π , то

$$\begin{aligned} K_x &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 \cdot a (1 - \cos t) dt = \\ &= \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \frac{a^3}{2} \left[t - 3 \sin t + \frac{3}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) - \right. \\ &\left. - \left(\sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t \right) \right] \Big|_0^{2\pi} = \frac{a^3}{2} \left(2\pi + \frac{3}{2} \pi \right) = \frac{7}{4} \pi a^3. \end{aligned}$$

578. Найти момент инерции одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ относительно оси Ox .

Решение. Как было показано в теоретическом кур-

се, момент инерции дуги относительно оси Ox вычисляется по формуле:

$$I_x = \int_0^l y^2 dl,$$

где dl — дифференциал дуги.

Найдем дифференциал дуги:

$$\begin{aligned} dl^2 &= dx^2 + dy^2 = a^2 (1 - \cos t)^2 dt^2 + a^2 \sin^2 t dt^2 = \\ &= 2a^2 (1 - \cos t) dt^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2} dt^2, \quad dl = 2a \sin \frac{t}{2} dt. \end{aligned}$$

Момент инерции дуги относительно оси Ox будет:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 \cdot 2a \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= 2a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \sin \frac{t}{2} dt = 8a^3 \int_0^{2\pi} \sin^5 \frac{t}{2} dt = \\ &= -16a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right)^2 d \cos \frac{t}{2} = \\ &= -16a^3 \left(\cos \frac{t}{2} - \frac{2}{3} \cos^3 \frac{t}{2} + \frac{1}{5} \cos^5 \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= -16a^3 \left(-1 + \frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{5} + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{256}{15} a^3. \end{aligned}$$

579. Найти момент инерции дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$, лежащей в первом квадранте, относительно оси Oy .

Решение. Как известно, момент инерции кривой относительно оси Oy вычисляется по формуле:

$$I_y = \int_0^l x^2 dl.$$

Так как $x = \sqrt{R^2 - y^2}$, то $x' = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - y^2}}$ и, следовательно,

$$1 + x'^2 = 1 + \frac{y^2}{R^2 - y^2} = \frac{R^2}{R^2 - y^2}; \quad dl = \frac{R dy}{\sqrt{R^2 - y^2}}.$$

Таким образом,

$$I_y = \int_0^R (R^2 - y^2) \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} dy = R \int_0^R \sqrt{R^2 - y^2} dy = \frac{1}{4} \pi R^3.$$

Для вычисления $\int_0^R \sqrt{R^2 - y^2} dy$ была использована

тригонометрическая подстановка

$$y = R \sin t.$$

580. Найти момент инерции фигуры, ограниченной дугой полуокружности $x^2 + y^2 = R^2$, $y > 0$ относительно оси Ox .

Решение. Как известно из теоретического курса, момент инерции I_x плоского тела относительно оси Ox равен:

$$I_x = \int_0^S y^2 dS,$$

где dS — элементарная площадь тела.

Таким образом,

$$I_x = \int_{-a}^a y^2 \cdot y dx = \int_{-a}^a (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = 2 \int_0^a (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx =$$

$$= 2R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = 2R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^2 dt =$$

$$= \frac{R^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2 \cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) dt =$$

$$= \frac{R^4}{2} \left(t + \sin 2t + \frac{1}{2} t + \frac{1}{8} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{R^4}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{8} \pi R^4.$$

581. Найти статические моменты дуги параболы $y^2 = 2x$ ($y > 0$) относительно осей Ox и Oy от $x = 0$ до $x = 2$.

582. Найти статический момент дуги астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, лежащей в первом квадранте, относительно оси Oy .

583. Найти статический момент относительно оси Ox дуги косинусоиды $y = \cos x$ от точки $x = -\frac{\pi}{2}$ до точки $x = \frac{\pi}{2}$.

584. Вычислить статический момент фигур, ограниченных следующими линиями:

а) $y = \frac{2}{1+x^2}$ и $y = x^2$ относительно оси Ox ;

б) $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ относительно оси Ox .

585. Вычислить статический момент фигуры, представленной на рисунке 24, где $BC \parallel AD$, $CK \perp AD$, $AB = 5$, $BC = 2$, $CK = KD = 3$, $AK = 6$, относительно оси Ox .

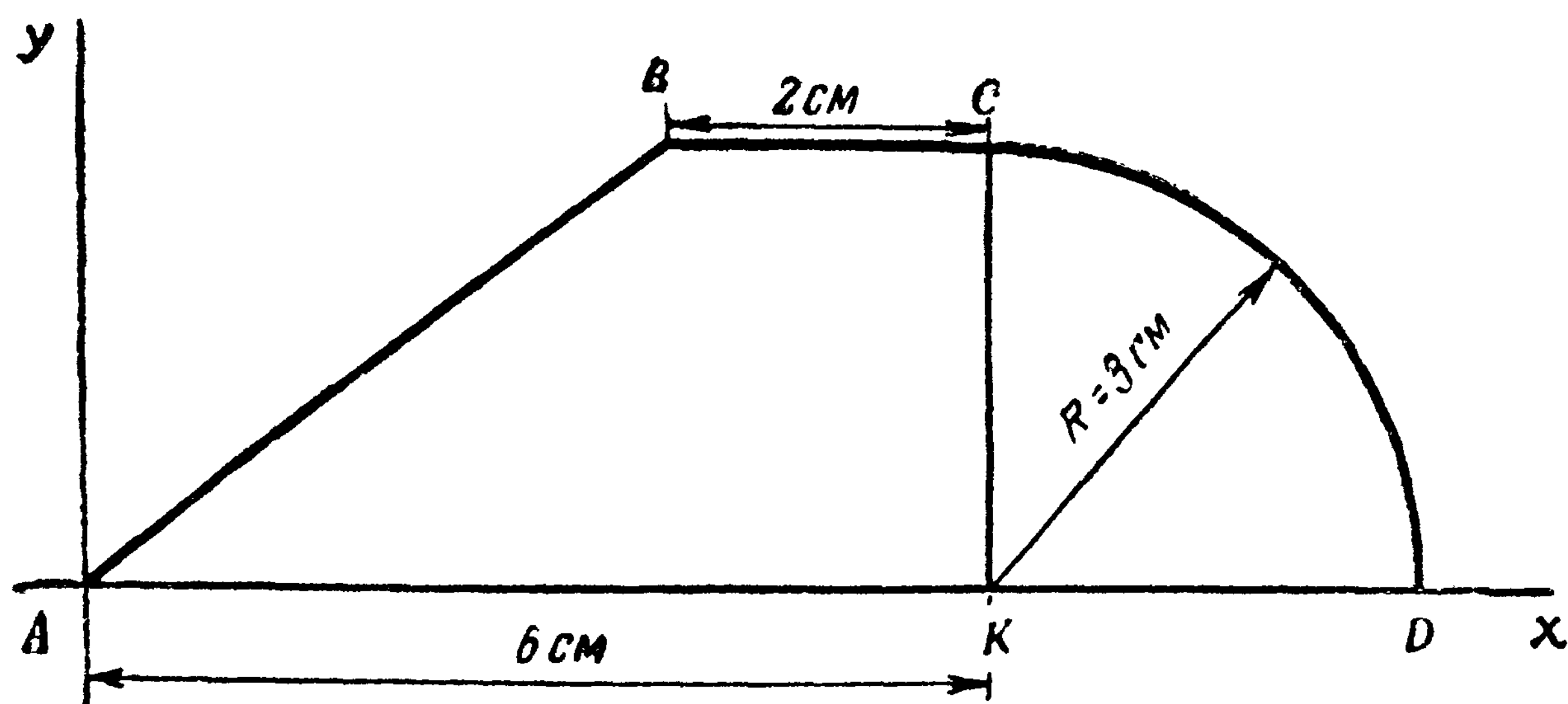


Рис. 24.

586. Найти статический момент прямоугольного равнобедренного треугольника с катетом, равным a , относительно этого катета.

587. Найти момент инерции отрезка AB , где $A(2; 3)$, $B(5; 4)$, относительно обеих координатных осей.

588. Найти момент инерции треугольника ABC (рис. 25) относительно стороны b .

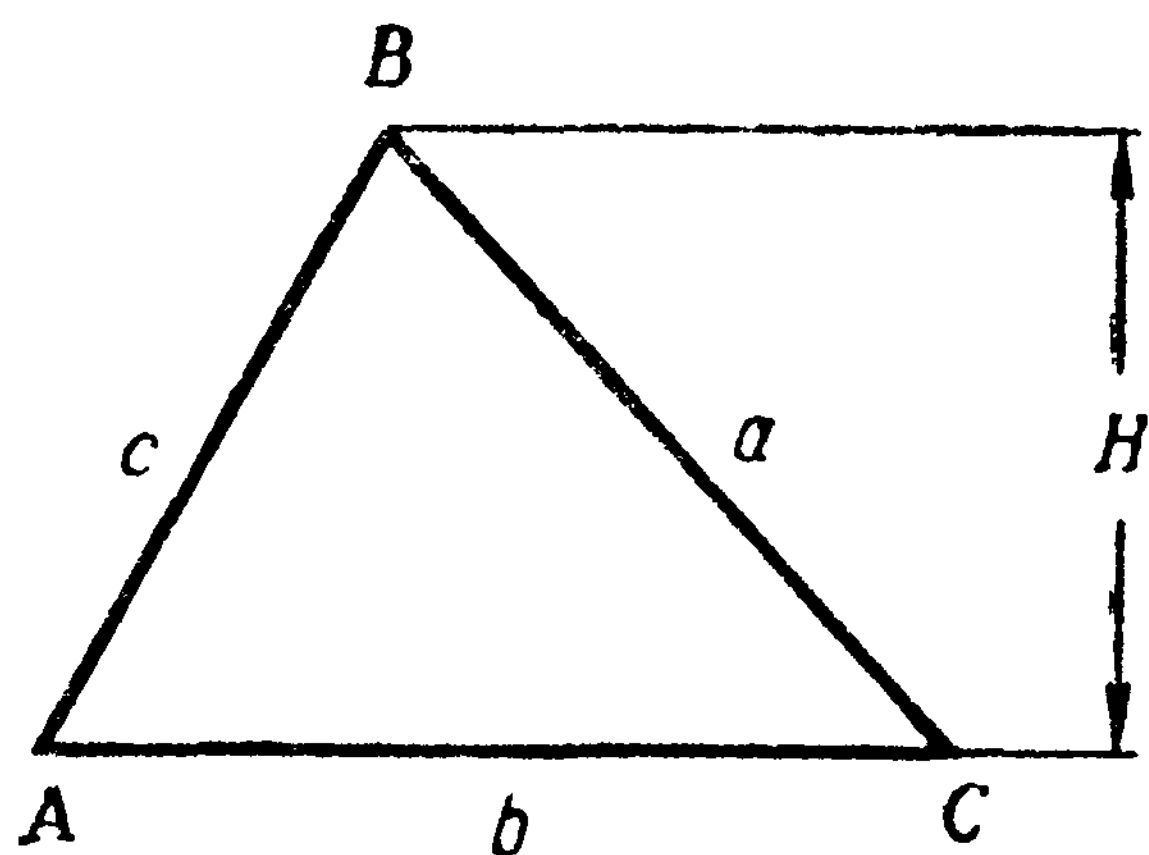


Рис. 25.

589. Найти момент инерции прямоугольника со сторонами a и b относительно обеих сторон.

590. Найти момент инерции трапеции $ABCD$ относительно ее основания AD , если $AD = a$, $BC = b$, высота трапеции равна h .

591. Найти момент инерции

параболического сегмента относительно основания. Основание сегмента равно a , «стрела сегмента» равна h .

§ 2. Вычисление координат центра тяжести плоских кривых и плоских тел. Теоремы Гюльдена

Предварительно изучите по учебнику Г. М. Фихтенгольца главу XII, п° 206, 207. При решении задач рекомендуется помнить, что если кривая расположена симметрично относительно некоторой прямой, то центр тяжести кривой лежит на этой прямой.

592. Найти центр тяжести дуги цепной линии:

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right),$$

содержащейся между точками, для которых $x = -a$ и $x = a$.

Решение. Так как рассматриваемая дуга расположена симметрично относительно оси Oy , то центр тяжести дуги лежит на оси Oy и, следовательно, $\xi = 0$. Найдем ординату η , пользуясь формулой

$$\eta = \frac{1}{l} \int_0^l y \, dl.$$

$$\text{Так как } y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right), \text{ то } y' = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

и, следовательно,

$$dl = \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) dx,$$

$$l = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) dx = a \int_0^a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \frac{dx}{a} =$$

$$= a \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) \Big|_0^a = a \left(e - \frac{1}{e} \right) = \frac{a(e^2 - 1)}{e}.$$

Ордината центра тяжести будет:

$$\eta = \frac{e}{a(e^2 - 1)} \int_{-a}^a \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) dx =$$

$$= \frac{e}{4(e^2 - 1)} \int_{-a}^a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)^2 dx =$$

$$= \frac{e}{2(e^2 - 1)} \int_0^a \left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}} \right) dx =$$

$$= \frac{e}{2(e^2 - 1)} \left(\frac{a}{2} e^{\frac{2x}{a}} + 2x - \frac{a}{2} e^{-\frac{2x}{a}} \right) \Big|_0^a =$$

$$= \frac{e}{2(e^2 - 1)} \left(\frac{a}{2} e^2 + 2a - \frac{a}{2} e^{-2} \right).$$

593. Найти центр тяжести одной арки циклоиды:

$$x = a(\varphi - \sin \varphi), \quad y = a(1 - \cos \varphi).$$

Решение. Так как арка циклоиды расположена симметрично относительно прямой $x = \pi a$, то центр тяжести дуги циклоиды лежит на этой прямой и, следовательно, $\xi = \pi a$.

Найдем ординату центра тяжести по формуле:

$$\eta = \frac{1}{l} \int_0^l y dl.$$

Длина дуги одной арки циклоиды равна $8a$ (см. задачу 493).

Найдем ординату центра тяжести:

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{1}{8a} \int_0^{2\pi} a(1 - \cos \varphi) \cdot 2a \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = \\ &= \frac{a}{4} \int_0^{2\pi} 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = \\ &= \frac{a}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = \\ &= \frac{a}{2} \left(-2 \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{2}{3} \cos^3 \frac{\varphi}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} a.\end{aligned}$$

594. Найти центр тяжести дуги кривой:

$$x = \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} \ln y,$$

содержащейся между точками, для которых $y = 1$ и $y = 2$.

Решение. Найдем $x' = \frac{1}{2} y - \frac{1}{2y} = \frac{1}{2} \left(y - \frac{1}{y} \right)$.

$$1 + x'^2 = \frac{\left(y + \frac{1}{y}\right)^2}{4}, \quad dl = \frac{1}{2} \left(y + \frac{1}{y}\right) dy;$$

$$l = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(y + \frac{1}{y}\right) dy = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} y^2 + \ln y \right) \Big|_1^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

(см. задачу 491).

Найдем абсциссу центра тяжести:

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{4}{3 + 2 \ln 2} \int_1^2 \left(\frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} \ln y \right) \cdot \frac{1}{2} \left(y + \frac{1}{y} \right) dy = \\ &= \frac{1}{3 + 2 \ln 2} \int_1^2 \left(\frac{1}{2} y^3 - y \ln y + \frac{y}{2} - \frac{1}{y} \ln y \right) dy = \\ &= \frac{1}{3 + 2 \ln 2} \left(\frac{1}{8} y^4 - \frac{y^2}{2} \ln y + \frac{1}{4} y^2 + \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} \ln^2 y \right) \Big|_1^2 =\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3 + 2 \ln 2} \left(\frac{27}{8} - 3 \ln 2 \right).$$

Найдем ординату центра тяжести:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{4}{3 + 2 \ln 2} \int_1^2 y \cdot \frac{1}{2} \left(y + \frac{1}{y} \right) dy = \\ &= \frac{2}{3 + 2 \ln 2} \int_1^2 \left(y^2 + 1 \right) dy = \frac{2}{3 + 2 \ln 2} \left(\frac{1}{3} y^3 + y \right) \Big|_1^2 = \\ &= \frac{20}{3(3 + 2 \ln 2)}. \end{aligned}$$

595. Найти центр тяжести однородной треугольной пластинки.

Решение. Разбиваем данную пластинку прямыми, параллельными одной из сторон, на бесконечно тонкие полоски. Центр тяжести каждой полоски находится в ее середине и лежит, таким образом, на медиане, а следовательно, и центр тяжести всей треугольной пластинки лежит на этой медиане. Так как это рассуждение применимо к любой стороне, то центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан.

Тот же результат получаем вычислением. Площадь полоски, отстоящей на расстояние x от данной стороны

b , равна $dS = \frac{b}{h} (h - x) \Delta x$, где h — высота, опущенная

на эту сторону, а Δx — ширина полоски, следовательно, расстояние центра тяжести от этой стороны равно:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{S} \int_0^h x dS = \frac{2}{bh} \int_0^h \frac{b}{h} (h - x) x dx = \\ &= \frac{2}{h^2} \left(h \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^h = \frac{h}{3}. \end{aligned}$$

Таким образом, центр тяжести треугольника находится на расстоянии, равном $\frac{1}{3}$ высоты от соответствующей

стороны, т. е. в точке пересечения его медиан, ибо это — единственная точка, обладающая таким свойством.

596. Найти центр тяжести площади, ограниченной осью Ox и одной полуволной синусоиды $y = \sin x$.

Решение. Так как площадь одной полуволны синусоиды расположена симметрично относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$, то центр тяжести лежит на этой прямой и, сле-

довательно, $\xi = \frac{\pi}{2}$. Ордината центра тяжести находится

по формуле $\eta = \frac{1}{2S} \int_0^{\pi} y^2 dx$.

Так как

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2,$$

то

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Итак, центр тяжести данной площади находится в точке $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8} \right)$.

597. Найти координаты центра тяжести площади, ограниченной параболой $y^2 = ax$, $x^2 = ay$.

Решение. Данные параболы, пересекающиеся в точках $O(0, 0)$ и $A(a; a)$, ограничивают площадь, расположенную симметрично относительно биссектрисы $y = x$. Следовательно, центр тяжести данной площади лежит на биссектрисе, а отсюда $\xi = \eta$.

Так как площадь ограничена двумя кривыми $y_1^2 = ax$ и $y_2 = \frac{x^2}{a}$, то абсцисса ξ центра тяжести площади находится по формуле:

$$\xi = \frac{1}{S} \int_0^a x (y_1 - y_2) dx.$$

Вычислив теперь площадь

$$S = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right) dx = \frac{a^2}{3},$$

найдем:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{3}{a^2} \int_0^a x \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right) dx = \\ &= \frac{3}{a^2} \left(\sqrt{a} \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{a} \cdot \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^a = \frac{9}{20} a. \end{aligned}$$

Таким образом, центр тяжести площади находится в точке $\left(\frac{9}{20} a; \frac{9}{20} a \right)$.

598. Найти центр тяжести площади, ограниченной осью абсцисс и одной аркой циклоиды:

$$x = a(\varphi - \sin \varphi), \quad y = a(1 - \cos \varphi).$$

Решение. Данная площадь расположена симметрично относительно прямой $x = \pi a$, следовательно, центр тяжести ее находится на этой прямой и отсюда $\xi = \pi a$.

Найдем η по формуле $\eta = \frac{1}{2S} \int_a^b y^2 dx$. Площадь S данной фигуры была вычислена (см. задачу 467): $S = 3\pi a^2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{6\pi a^2} \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos \varphi)^3 d\varphi = \frac{a}{6\pi} \int_0^{2\pi} \left[1 - 3\cos \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} (1 + \cos 2\varphi) - (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi \right] d\varphi = \\ &= \frac{a}{6\pi} \left(\varphi - 3\sin \varphi + \frac{3}{2} \varphi + \frac{3}{4} \sin 2\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \sin \varphi + \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{5}{6} a. \end{aligned}$$

Центр тяжести данной площади находится в точке $\left(\pi a; \frac{5}{6} a \right)$.

599. Пользуясь теоремой Гюльдена, вычислить поверхность тора, образованного вращением круга радиуса a вокруг оси, расположенной в его плоскости и отстоящей от центра его на расстояние b ($b > a$).

Решение. Так как длина данной окружности равна $2\pi a$, а длина окружности, описанной центром тяжести ее, равна $2\pi b$, то поверхность тора по первой теореме Гюльдена равна:

$$S = 2\pi a \cdot 2\pi b = 4\pi^2 ab.$$

600. Пользуясь теоремой Гюльдена, вычислить объем и боковую поверхность прямого кругового конуса.

Решение. Боковая поверхность конуса с высотой h , образующей l и радиусом основания r получается при вращении гипотенузы длиной l вокруг катета длиной h . Центр тяжести гипотенузы находится на ее середине и удален от оси вращения на $\frac{r}{2}$. Поэтому по первой теореме Гюльдена боковая поверхность равна:

$$S_6 = 2\pi \cdot \frac{r}{2} \cdot l = \pi r l.$$

Площадь треугольника равна $\frac{1}{2}hr$, центр тяжести его, находясь на пересечении медиан, отстоит от катета h на расстояние, равное $\frac{1}{3}$ высоты, опущенной на этот катет, т. е. $\frac{1}{3}r$, следовательно, по второй теореме Гюльдена объем конуса равен:

$$V_k = 2\pi \frac{r}{3} \cdot \frac{1}{2} hr = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

601. На цилиндре, имеющем 6 см в диаметре, кругом вдоль поверхности вырезан канал, имеющий поперечным сечением равносторонний треугольник со стороной в 0,5 см. Вычислить объем срезанного материала.

Решение. Искомый объем есть объем тела, получаемого при вращении равностороннего треугольника со стороной в 0,5 см вокруг оси, параллельной основанию и удаленной от него на 3 см, причем вершина лежит между основанием и осью (рис. 26).

Высота треугольника
равна $\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$,
площадь его равна $\frac{1}{16}\sqrt{3}$.

Расстояние центра тяжести
от оси $OC = OA - AC =$
 $= 3 - \frac{1}{12}\sqrt{3}$ (AC равно $\frac{1}{3}$
высоты). По второй тео-
реме Гюльдена имеем:

$$V = \frac{1}{16}\sqrt{3} \cdot 2\pi \times$$

$$\times \left(3 - \frac{1}{12}\sqrt{3} \right) = \frac{\pi}{32} \left(12\sqrt{3} - 1 \right) \text{ см}^3.$$

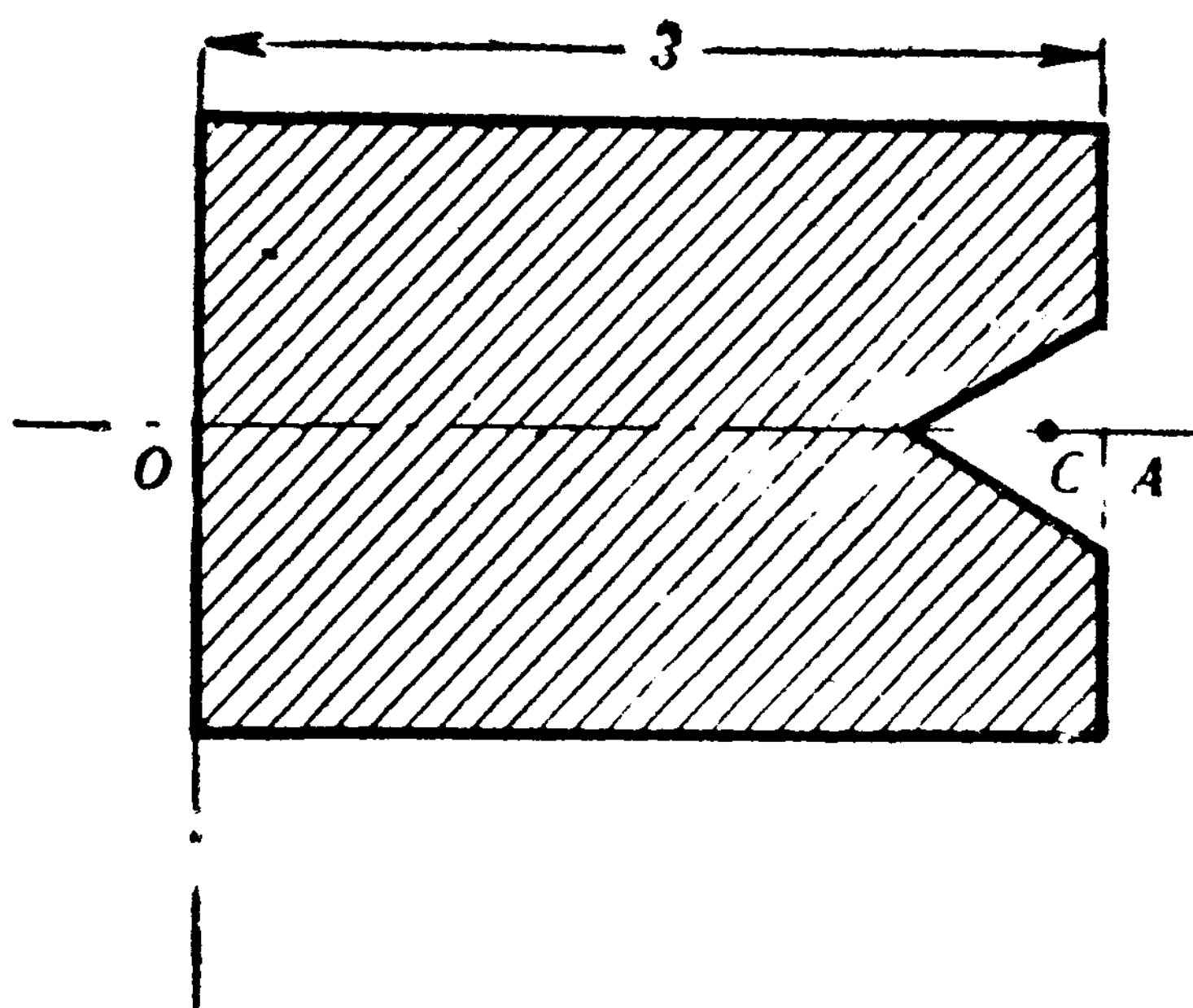


Рис. 26.

602. Длина одной арки циклоиды $x = a(\varphi - \sin \varphi)$,
 $y = a(1 - \cos \varphi)$ равна $8a$, а поверхность, образуемая вра-
щением ее вокруг оси Ox , равна $\frac{64}{3}\pi a^2$. Вычислить по-
верхность, образуемую вращением той же арки циклои-
ды вокруг касательной в верхней ее точке.

Решение. Пусть η — расстояние центра тяжести от
оси Ox , тогда по первой теореме Гюльдена:

$$\frac{64}{3}\pi a^2 = 8a \cdot 2\pi\eta, \text{ откуда } \eta = \frac{4}{3}a.$$

Наибольшая ордината кривой соответствует $\varphi = \pi$ и рав-
на $2a$, причем касательная в этой точке параллельна оси
 Ox ; следовательно, расстояние центра тяжести от этой

касательной равно $2a - \frac{4}{3}a = \frac{2}{3}a$.

Таким образом, искомая поверхность, образуемая вра-
щением той же арки циклоиды вокруг касательной в верх-
ней ее точке равна:

$$S = 8a \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3}a = \frac{32}{3}\pi a^2.$$

603. Найти центр тяжести дуги, составляющей чет-
верть окружности радиуса a , расположенной в первом
квадранте.

604. Найти центр тяжести расположенной в первом квадранте дуги гипоциклоиды $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

605. Найти центр тяжести половины площади эллипса, опирающейся на большую ось.

606. Найти центр тяжести площади, заключенной

между параболой $x^2 + y^2 = a^2$ и осями координат.

607. Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной кривой $ay^2 = x^3$ и прямой $x = a$ ($a > 0$).

608. Найти центр тяжести площади, ограниченной кривыми

$$y = ax^3, x = a, y = 0.$$

609. Найти центр тяжести площади, ограниченной эллипсом $x^2 + 4y^2 = 4$ и окружностью $x^2 + y^2 = 4$ и расположенной в первом квадранте.

610. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной замкнутой кривой $y^2 = ax^3 - x^4$.

§ 3. Разные задачи

Предварительно изучите по учебнику Г. М. Фихтенгольца главу XII, п° 208.

611. Найти давление на полукруг, вертикально погруженный в жидкость, если его радиус равен 5 см, а верхний диаметр лежит на свободной поверхности воды (рис. 27).

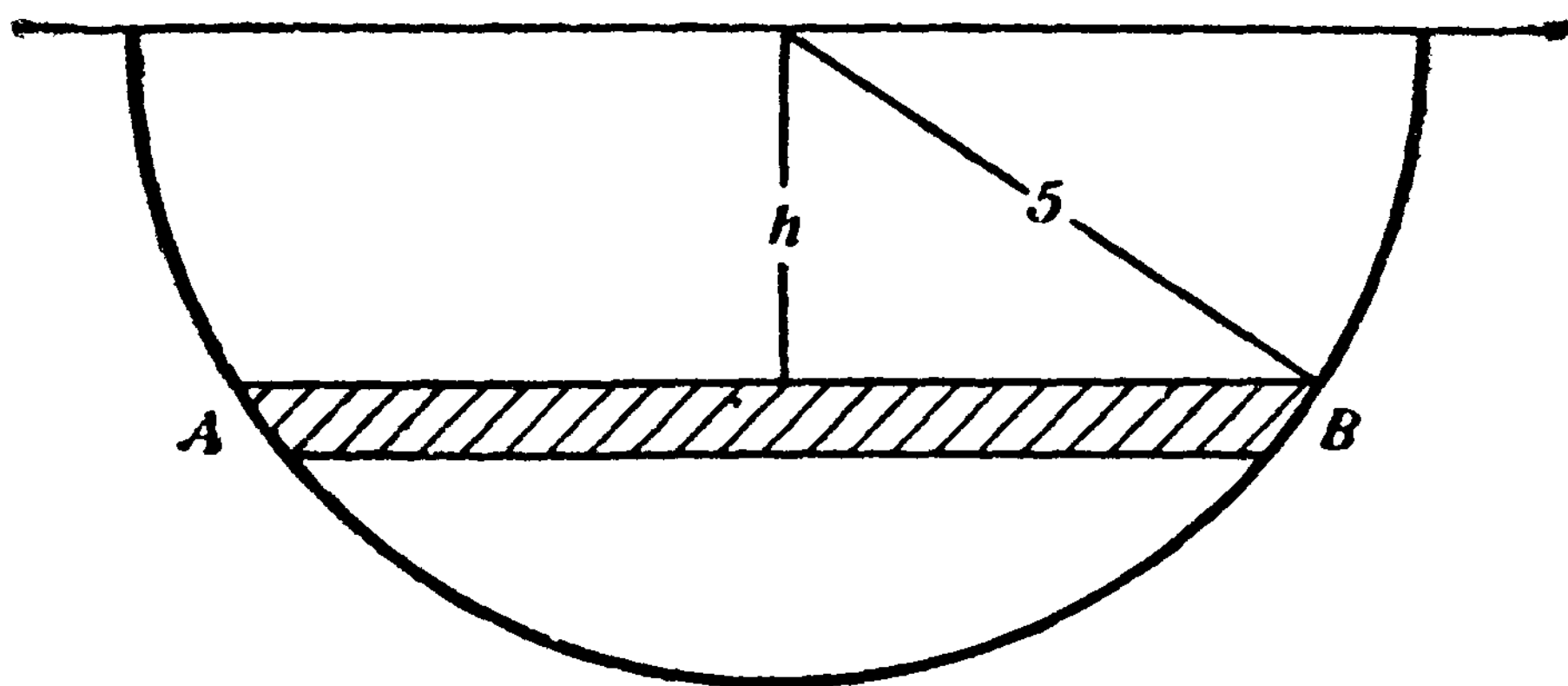


Рис. 27.

Решение. Давление жидкости на дно сосуда равно весу вертикального столба жидкости с основанием в 1 см, находящегося над дном. Объем столба, имеющего в основании единицу площади, а высоту h , равен h . Поэто-

му давление на глубине h будет:

$$p = \omega h,$$

где ω — вес кубической единицы этой жидкости.

Чтобы вычислить давление на вертикальную поверхность, воспользуемся тем фактом, что в каждой точке давление во все стороны одинаково. На рисунке 27 изображена вертикальная поверхность. Давление на полосу AB , содержащуюся между двумя весьма близкими горизонталями, приблизительно равно $p \Delta S$, где ΔS — площадь этой полосы. Зная это элементарное давление, найдем искомое давление P :

$$P = \int_0^5 p dS = \omega \int_0^5 h dS.$$

Так как $dS = 2 \sqrt{25 - h^2} dh$, а $\omega = 1 \Gamma$, то

$$\begin{aligned} P &= \int_0^5 h \cdot 2 \sqrt{25 - h^2} dh = -\frac{2}{3} (25 - h^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^5 = \\ &= -\frac{2}{3} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

612. Вычислить давление на треугольник, имеющий основание b см, высоту h см, если вершина треугольника лежит на поверхности воды, а высота его расположена вертикально.

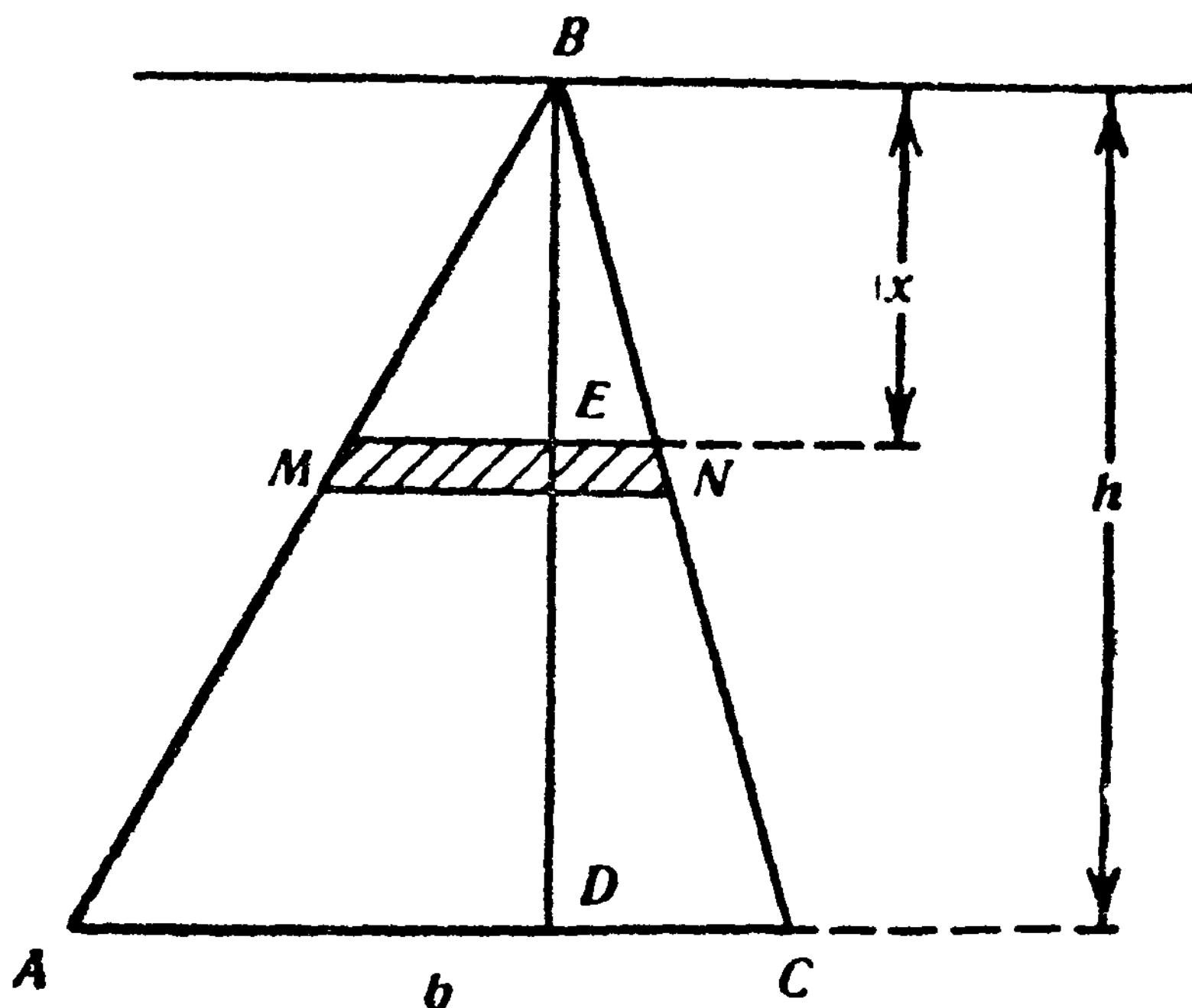


Рис. 28.

Решение. На рисунке 28 изображен данный треугольник, погруженный в воду. Берем произвольную полосу MN , находящуюся на глубине x см. Ее длина легко определяется из подобия треугольников BAC и BMN . Принимая (приближенно) эту полосу за прямоугольник, найдем ее площадь: $\Delta S = \frac{bx}{h} \cdot \Delta x$. Отсюда

$$P = \omega \int_0^h x dS = \frac{b\omega}{h} \int_0^h x^2 dx = \frac{1}{3} bh^2 \Gamma \quad (\omega = 1 \Gamma).$$

613. Вычислить давление жидкости на боковые стенки кругового цилиндра, высота которого равна h см, а радиус основания r см, удельный вес жидкости равен d .

614. Вычислить давление, испытываемое треугольником, высота которого равна h см, основание равно b см, если он погружен в воду таким образом, что основание его лежит на поверхности воды, а высота направлена вертикально вниз.

615. Вычислить давление воды на щит, имеющий форму трапеции, погруженный в воду вертикально. Верхнее основание, равное a м, лежит на поверхности воды, нижнее основание равно b м, высота щита равна h м.

616. Конец трубы, погруженной горизонтально в воду, закрыт заслонкой. Определить давление, испытываемое этой заслонкой, если ее диаметр равен 60 см, а центр ее находится на глубине 15 м под водой.

617. Сжатие винтовой пружины пропорционально приложенной силе. Вычислить работу, производимую при сжатии пружины на 4 см, если для сжатия ее на 1 см нужно приложить силу в 1 кг.

Решение. Обозначим через x сжатие пружины. Тогда, согласно закону Гука, $F = kx$, где k — постоянная, характеризующая материал пружины. Для данного случая

$$0,01 k = 1, \quad k = 100, \quad F = 100x.$$

Предполагая, что F выражена в килограммах, а x — в метрах, найдем произведенную работу A :

$$A = \int_0^{0,04} F dx = \int_0^{0,04} 100x dx = 50x^2 \Big|_0^{0,04} = 0,08 \text{ кгм.}$$

618. Работа, которую необходимо затратить, чтобы поднять тело от одной высоты до другой, выраженная в килограммометрах, равна произведению веса тела в килограммах на высоту поднятия, выраженную в метрах. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из цилиндрической цистерны, радиус которой равен a м, а высота — b м.

Решение. Разобьем объем цистерны плоскостями, параллельными основанию и находящимися друг от друга на расстоянии Δx . Вычислим объем полученного элементарного цилиндра:

$$dv = \pi a^2 \Delta x \text{ м}^3.$$

Вес воды в этом объеме будет равен $1000\pi a^2 \Delta x$ кг. Элементарная работа dA , затраченная для поднятия этой массы, находящейся на глубине x м, равна:

$$dA = 1000 \pi a^2 \Delta x \cdot x \text{ кгм}.$$

Отсюда искомая работа равна:

$$A = 1000 \pi a^2 \int_0^b x dx = 500 \pi a^2 x^2 \Big|_0^b = 500 \pi a^2 b^2 \text{ кгм}.$$

619. Вычислить работу на преодоление силы тяжести, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из резервуара, имеющего форму конуса, обращенного вершиной вниз. Высота конуса H , радиус R .

620 Какую работу надо затратить, чтобы насыпать кучу песка конической формы с радиусом 1,2 м и высотой 1 м, если удельный вес песка равен 2?

621. Шар радиуса R , изготовленный из материала, плотность которого $\rho = 1 \text{ г/см}^3$, погружен в воду так, что касается поверхности. Какую работу нужно произвести, чтобы вытащить шар из воды?

622. Конус, радиус основания которого $R = 40 \text{ см}$, высота $H = 20 \text{ см}$, плавает на поверхности воды сверху. Плотность материала, из которого сделан конус, $\rho = 0,9 \text{ г/см}^3$. Какую работу нужно затратить, чтобы погрузить конус полностью в воду?

623. Вычислить работу, производимую при растягивании пружины на 0,05 м, если известно, что сила, которая требуется для растяжения пружины, пропорциональ-

на удлинении x пружины и что для удлинения пружины на $0,01$ м требуется сила, равная 1 кГ.

624. Вычислить работу, необходимую для того, чтобы выкачать воду из полусферического сосуда, радиус которого R м.

625. Вычислить давление ртути, наполняющей стакан, на боковые стенки стакана, если высота стакана равна 12 см, диаметр основания равен 8 см, удельный вес ртути равен $13,6$.

Дополнительные задачи к главе V

626. Найти центр тяжести полуокружности $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

627. Найти центр тяжести полукруга, ограниченного полуокружностью $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ и осью Ox .

628. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной дугой астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, расположенной в первом квадранте, и осями координат.

629. Найти декартовы координаты центра тяжести фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

630. Найти декартовы координаты центра тяжести фигуры, ограниченной правой петлей лемнискаты Бернулли $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

ОТВЕТЫ

Глава I

13. $-\frac{2}{\sqrt{x}} + C.$ 14. $\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + C.$ 15. $\frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2x^4} + C.$
16. $\frac{2}{5} x^{\frac{3}{2}} - x + C.$ 17. $\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} (a + b) x^2 + \frac{1}{2} abx^2 + C.$
18. $\frac{2}{3} x \sqrt{x} + 2 \sqrt{x} + C.$ 19. $x^2 - 5x + 7 \ln |x| + C.$
20. $\frac{1}{3} x^3 + 2x - \frac{1}{x} + C.$ 21. $\frac{1}{2} y^2 + 4y + 4 \ln |y| + C.$
22. $az + \frac{4}{3} \sqrt{a} z^{\frac{3}{2}} + \frac{z^2}{2} + C.$ 23. $e^x - \frac{5}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$
24. $\frac{2x}{\ln 2} - 2 \operatorname{arc} \sin \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$ 25. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$
26. $\sin x + \cos x + C.$ 27. $-5x + 6 \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$
28. $\frac{1}{3} x^3 + 2x + \sqrt{2} \ln \left| \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} \right| + C.$ 29. $-5x + 12 \ln |2 + x| + C.$
30. $\frac{1}{3} x + \frac{7}{3 \sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + C.$ 31. $-\frac{1}{x+1} + C.$
32. $\frac{(x+1)^{-n+1}}{1-n} + C.$ 33. $\sqrt{2x+1} + C.$ 34. $-\frac{1}{3} \operatorname{ctg} 3x + C.$
35. $\frac{2}{21} \left[(x+7)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}} \right] + C.$ 36. $\frac{1}{2} e^{2y} + 2y - \frac{1}{2} e^{-2y} + C.$
37. $5x - \frac{3}{5} \cos 5x + \frac{2}{3} \sin 3x + C.$ 38. $\frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^9 + C.$

39. $\frac{1}{2a} (e^{2ax} - e^{-2ax}) - 2x + C.$ 40. $-\frac{1}{3} \cos (3x + 5) + C.$
41. a) $\frac{1}{48} (3x - 2)^{16} + C.$ б) $\frac{1}{5} e^{5x+3} + C.$
42. $-\ln |\cos x| + C.$ 43. $\ln |\operatorname{tg} x| + C.$ 44. $\frac{1}{3} \ln |x^3 + 1| + C.$
45. $-\frac{1}{2} \ln (2 \cos^2 x + 3) + C.$ 46. $\ln |3x^2 - 7x + 3| + C.$
47. $\ln (e^x + e^{-x}) + C.$ 48. $\sqrt{x^2 - 1} + C.$ 49. $2\sqrt{x^2 + ax + b} + C.$
50. $-\frac{1}{3} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$ 51. $\frac{2}{9} (x^3 - 1)^{\frac{3}{2}} + C.$
64. $\frac{5}{2} \sin \left(\frac{2x - 3}{5} \right) + C.$ 65. $\frac{1}{2} \sin (x^2 - 1) + C.$
66. $-3\sqrt{4 - x^2} - 2 \arcsin \frac{x}{2} + C.$
67. $2\sqrt{x^2 + 4} + 3 \ln (x + \sqrt{x^2 + 4}) + C.$ 68. $\frac{1}{3} e^{x^3} + C.$
69. $e^{-\frac{1}{x}} + C.$ 70. $-\frac{1}{\ln x} + C.$ 71. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} \right| + C.$
72. $\frac{1}{3} \operatorname{arctg}^3 x + C.$ 73. $2e^{\sqrt{x}} + C.$ 74. $-\frac{1}{2} e^{2\cos x} + C.$
75. $-\ln (2 + e^{-x}) + C.$ 76. $-2\sqrt{1 - x^2} - 3 \arcsin x + C.$
77. $3\sqrt{x^2 - 4} - 2 \ln |x + \sqrt{x^2 - 4}| + C.$
78. $\frac{5}{8} \ln (4x^2 + 3) - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{\sqrt{3}} + C.$
79. $\frac{3}{2} \ln (x^2 - 6) + \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{6}}{x + \sqrt{6}} \right| + C.$ 80. $\arcsin e^t + C.$
81. $\frac{2}{3} \sqrt{\operatorname{tg}^3 x} + C.$ 82. $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} (x^3) + C.$
83. $\frac{1}{2} \arcsin (x^2) + C.$ 84. $-\ln |\arccos x| + C.$
85. $\arcsin \frac{\sin x}{\sqrt{2}} + C.$ 86. $2\sqrt{1 - \cos x} + C.$

87. $\ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 4}) + C$. 88. $\frac{1}{3} \sin(x^3) + C$.
89. $\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x + C$.
90. $-\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin^2 x + C$.
91. $-\arcsin \frac{1}{x} + C$. 92. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C$.
93. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$. 94. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C$. 95. $-\frac{x}{a^2 \sqrt{x^2-a^2}} + C$.
96. $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} + C$. 109. $xe^x - e^x + C$. 110. $\frac{2^x}{\ln^2 2} (x \ln 2 - 1) + C$.
111. $\frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C$. 112. $\frac{1}{3} x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + C$.
113. $-\frac{9x^2 + 36x + 34}{27} \cos 3x + \frac{2x + 4}{9} \sin 3x + C$.
114. $\frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$. 115. $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.
116. $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$. 117. $x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x + C$.
118. $x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C$. 119. $\frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C$.
120. $\frac{1}{2} (\sin x - \cos x) e^x + C$. 121. $\frac{1}{2} (\sin x + \cos x) e^x + C$.
122. $\frac{1}{2} x [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$.
123. $x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C$.
124. $\frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + C$. 125. $\frac{1}{2} x \sqrt{x^2-a^2} -$
 $-\frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C$. 126. $-\frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + C$.
134. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + C$. 135. $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{3}} + C$.
136. $\ln \left| \frac{x+2}{x+3} \right| + C$. 137. $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{x}{2x+5} \right| + C$.

$$138. \frac{1}{4} \ln |4x^2 - 4x - 2| + \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \left| \frac{2x - 1 - \sqrt{3}}{2x - 1 + \sqrt{3}} \right| + C.$$

$$139. \frac{1}{6} \ln |3x^2 - 12x + 7| + C. \quad 140. \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 5 \ln |x - 1| -$$

$$- 11 \ln |x - 2| + C. \quad 141. \frac{3}{4} \ln |2x - 1| - \frac{7}{4(2x - 1)} + C.$$

$$142. \ln |1 - x| + \frac{2}{1 - x} + C. \quad 143. \ln |x^2 - 2x + 5| + 3 \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C.$$

$$144. \frac{1}{2} \ln (2x^2 + x + 1) + \frac{5}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4x + 1}{\sqrt{7}} + C.$$

$$149. \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C. \quad 150. \frac{1}{\sqrt{3}} \ln (3x + 2 + \sqrt{9x^2 + 12x + 6}) + C.$$

$$151. \frac{1}{3} \ln |3x + 1 + \sqrt{9x^2 + 6x - 8}| + C. \quad 152. \arcsin \frac{2x - 1}{\sqrt{5}} + C.$$

$$153. \frac{1}{3} \sqrt{9x^2 + 6x - 8} + C. \quad 154. -\frac{1}{4} \sqrt{3 + 4x - 4x^2} +$$

$$+ \frac{7}{4} \arcsin \frac{2x - 1}{2} + C. \quad 155. -2 \sqrt{4x - 3 - x^2} + 5 \arcsin (x - 2) + C.$$

$$156. \sqrt{x(x - 2)} + 4 \ln |x - 1 + \sqrt{x(x - 2)}| + C.$$

$$157. \begin{cases} -\arcsin \frac{1}{2x - 3} + C \text{ при } 2x - 3 > 0, \\ +\arcsin \frac{1}{2x - 3} + C \text{ при } 2x - 3 < 0. \end{cases}$$

$$158. \begin{cases} -2 \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + C \text{ при } x > 1, \\ +2 \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + C \text{ при } x < 1. \end{cases}$$

$$159. \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + C. \quad 160. -\frac{1}{1 + e^x} + C. \quad 161. -\frac{1}{2(1 + e^{2x})} + C.$$

$$162. 2 \sqrt{e^x + 1} + \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} + C. \quad 163. -\operatorname{ctg} x - \frac{2 \sqrt{\operatorname{ctg}^3 x}}{3} + C.$$

$$164. \ln |1 + \operatorname{ctg} x| - \operatorname{ctg} x + C. \quad 165. (x + 1)^2 \operatorname{arctg} x - x - \ln (1 + x^2) + C.$$

$$166. \frac{x}{1 + x} \ln x - \ln |1 + x| + C. \quad 167. e^x (x^2 - 3x + 4) + C.$$

$$168. (x^2 - 1) \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

$$169. (2x^2 - 1) \arcsin x + x \sqrt{1 - x^2} + C.$$

$$170. \ln \left| \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \right| - \frac{\operatorname{arctg} x}{x} + C.$$

$$171. 4 \ln |x + 3| + \frac{19}{x + 3} + C. \quad 172. \ln \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right) + C.$$

$$173. \sqrt{x^2 + 2x + 2} - \ln (x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}) + C.$$

$$174. -\sqrt{1 + x - x^2} - \arcsin \frac{1 + \sqrt{1 + x - x^2}}{x} + C.$$

$$175. -\sqrt{ax - x^2} - a \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a - x}{x}} + C.$$

$$176. \ln \left| \frac{x}{2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1}} \right| + C.$$

$$177. -\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} + C. \quad 178. 2\sqrt{x} + \ln \left| \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} \right| + C.$$

Глава II

$$186. \ln \left| \frac{(x - 1)^5}{(x - 2)^2 (x + 2)^3} \right| + C. \quad 187. \ln \left| \frac{(x + 1)^5 (x - 2)^4}{(3x - 1)^9} \right| + C.$$

$$188. \frac{x^2}{2} + \ln \frac{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}{x^2} + C. \quad 189. \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x^2 (x - 3)}{(x + 2)^2 (x - 1)} \right| + C.$$

$$190. \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left| \frac{x^2 (x - 2)^5}{(x + 2)^3} \right| + C. \quad 191. \frac{x^2}{2} - 2x +$$

$$+ \frac{1}{6} \ln \left| \frac{(x - 1)(x + 2)^{32}}{(x + 1)^3} \right| + C. \quad 192. \ln \left| \frac{x^2 - 1}{x} \right| + C.$$

$$193. \ln \left| \frac{x^2 (2x + 3)}{(x + 1)^2} \right| + C. \quad 194. x + \frac{1}{x} + \ln \frac{(x - 1)^2}{|x|} + C.$$

$$195. \frac{1}{4} \left(\frac{2x}{1 - x^2} + \ln \left| \frac{x + 1}{x - 1} \right| \right) + C. \quad 196. \frac{1}{4} \ln |x + 1| - \frac{1}{2(x + 1)} +$$

$$+ \frac{3}{4} \ln |x - 1| + C. \quad 197. -\frac{x}{2(x^2 - 4)} + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x - 2}{x + 2} \right| + C.$$

$$198. -\frac{5x + 12}{x^2 + 6x + 8} + 2 \ln \left| \frac{x + 4}{x + 2} \right| + C. \quad 199. \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| +$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C. \quad 200. \frac{1}{3} \ln |x - 1| - \frac{1}{6} \ln (x^2 + x + 1) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \quad 201. \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C. \\
202. & -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2+1} + C. \quad 203. \frac{1}{3} \ln |x^3+1| + C. \\
204. & 3x + \ln |x-1| - \ln \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \\
205. & \ln |x| + \frac{1}{1+x^2} + C. \quad 206. \frac{1}{2x^2(x^2+1)} + C. \quad 207. \frac{x-1}{2(x^2+1)} - \\
& - \frac{1}{2} \ln |1+x| + \frac{1}{4} \ln (1+x^2) + C. \quad 212. 2 \sqrt{x+4} + \\
& + 2 \ln \left| \frac{2-\sqrt{x+4}}{2+\sqrt{x+4}} \right| + C. \quad 213. \frac{3}{8} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{4}{3}} + C. \\
214. & \frac{2}{5} (1+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} + C. \quad 215. \frac{6x-9a}{10} \sqrt{(x+a)^2} + C. \\
216. & -\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C. \quad 217. \ln \left| \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right| + \\
& + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C. \quad 218. \frac{5}{2} \ln \left| \frac{\sqrt[5]{x-1}}{2+\sqrt[5]{x-1}} \right| + C. \\
219. & 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1} - 6 \ln (\sqrt[6]{x+1} + 1) + C. \\
220. & \frac{6}{7} \sqrt[6]{x^7} - \frac{4}{5} \sqrt[4]{x^5} + C. \quad 221. \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C. \\
222. & -x + 2\sqrt{x} - \ln (1+2\sqrt{x}) + C. \quad 223. \ln |x| - \\
& - \frac{3}{2} \ln (1+\sqrt[3]{x^2}) + C. \quad 224. 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + 3 \ln \left| \frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1} \right| + C. \\
228. & \frac{3}{1+\sqrt[3]{x}} + 3 \ln \left| \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} \right| + C. \quad 229. \frac{x}{(1+\sqrt{x})^2} + C. \\
230. & \frac{10x^{\frac{2}{3}}-16}{15} (2+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{4}} + C. \quad 231. \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}(3x^2-2)}{15} + C. \\
232. & -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C. \quad 233. -(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \left(2x + \frac{1}{x} \right) + C. \\
237. & \ln \left| \frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x+2\sqrt{x^2+x+1}} \right| + C. \quad 238. \frac{1}{2} \arccos \frac{2-x}{x\sqrt{2}} + C.
\end{aligned}$$

239. $\frac{1}{2} (3-x)\sqrt{1-2x-x^2} + \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$
240. $\frac{2}{5} \sqrt{\frac{x-1}{x+4}} + C.$ 266. $\sin^5 x - \sin^4 x + \sin^2 x + C.$
267. $\frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + \frac{1}{3} \sec 3x + C.$
268. $\frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$ 269. $-\frac{1}{16} \cos 8x - \frac{1}{12} \cos 6x + C.$
270. $\frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{14} \sin 7x + C.$ 271. $\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{14} \sin 7x + C.$
272. $-\frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 4x + \frac{1}{24} \cos 6x + C.$ 273. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$
274. $-\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + C.$ 275. $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + C.$
276. $\frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{1 + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{15}} + C.$ 277. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{2} + C.$
278. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} \operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{2} \operatorname{tg} x + 1} \right| + C.$ 279. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C.$
280. $-\frac{1}{\operatorname{tg} x + 1} + C.$ 281. $\operatorname{arctg} (1 - \operatorname{tg} x) + C.$
282. $\frac{1}{4} \ln (2 \operatorname{tg}^2 x + 3) - \frac{3}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2} \operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C.$
283. $\frac{1}{2} \ln (2 + \operatorname{ctg}^2 x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}} + C.$ 284. $-\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C.$
285. $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C.$ 286. $\varphi + \cos^2 \varphi + C.$ 287. $\frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin 2ax + C.$
288. $\frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin 2ax + C.$ 289. $\frac{2}{3} (\sin^3 x - \cos^3 x) + \sin x - \cos x + C.$
290. $\frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \sin x + C.$ 291. $\frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C.$
292. $\frac{1}{48} \sin^3 2x + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + x + C.$ 293. $-\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} +$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \quad 294. \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C. \quad 295. \frac{1}{13} \cos^{13} x - \\
& - \frac{3}{11} \cos^{11} x + \frac{1}{3} \cos^9 x - \frac{1}{7} \cos^7 x + C. \quad 296. -\frac{1}{11} \sin^{11} x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C. \\
& 297. \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos x| + C. \quad 298. -\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x - x + C. \\
& 299. \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 z + C. \quad 300. \frac{1}{2} (\operatorname{tg}^2 t - \operatorname{ctg}^2 t) + \ln \operatorname{tg}^2 t + C. \\
& 301. x^2 + \ln \left| \frac{x^2 - 1}{x} \right| + C. \quad 302. \frac{2}{x + 1} + \ln \left| \frac{x}{x + 1} \right| + C. \\
& 303. x - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{3}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \\
& 304. \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + \frac{5}{12} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C. \\
& 305. \frac{1}{x^2 + 1} + \ln \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2 + 1}} - \operatorname{arctg} x + C. \\
& 306. \frac{1}{5} \ln \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 5}} + C. \quad 307. \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right| - \frac{1}{x+1} \right) + C. \\
& 308. 3 \sqrt[3]{x} - 3 \ln (1 + \sqrt[3]{x}) + 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C. \\
& 309. \sqrt{2x} - \frac{3}{5} \sqrt[6]{(2x)^5} + C. \quad 310. 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x+1} + C. \\
& 311. -\frac{\sqrt{2x+3}}{x} + C. \quad 312. \frac{1}{2} \frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2}} + C. \\
& 313. 2 \sqrt{\operatorname{tg} x} + C. \quad 314. -\frac{1}{15} \cos^5 3x + C. \\
& 315. \frac{1}{4} \sin 2x + C. \quad 316. \operatorname{tg}^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \\
& + 2 \ln \left| \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C. \quad 317. -\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} + C. \\
& 318. \frac{1}{\sqrt{10}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{10}} \right) + C. \quad 319. \operatorname{arctg} (2 \operatorname{tg} x + 1) + C. \\
& 320. -\frac{1}{1 + \operatorname{tg} x} + C.
\end{aligned}$$

Глава III

$$325. \frac{7}{3}. \quad 326. e(e-1). \quad 327. \frac{2}{3}(5\sqrt{5}-3\sqrt{3}). \quad 328. \frac{1}{2}.$$

$$329. \frac{1}{4}(b^4-a^4). \quad 330. \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2-a^2}{a^2b^2}. \quad 333. 1. \quad 334. \frac{5}{2}.$$

$$335. \frac{1}{2}. \quad 336. 0. \quad 337. 0. \quad 338. 15\pi. \quad 339. 0. \quad 340. 0.$$

$$343. 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx \leq \frac{\pi^2}{4}. \quad 344. 0 \leq \int_1^e x^2 \ln x \, dx \leq e^2(e-1).$$

$$345. \frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7}. \quad 346. \frac{2\pi}{13} \leq \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x} \leq \frac{2\pi}{7}.$$

$$350. \quad \text{a) } \frac{5}{3}; \quad \text{б) } 0; \quad \text{в) } \ln 2. \quad 355. \frac{\sin \sqrt{x}}{x}.$$

$$356. \frac{1}{\sqrt{x}} (\sqrt{2} \sin 2x - \sin x). \quad 357. a = \frac{\pi}{4}.$$

$$358. x = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad 359. \min \text{ при } x = 1, \text{ точки перегиба: } x_1 = \frac{4}{3}; \quad x_2 = 2. \quad 360. \max \text{ при } x = 4, \min \text{ при } x = 16.$$

$$361. a=t. \quad 364. \ln 3. \quad 365. \ln \frac{9}{8}. \quad 366. \ln \frac{4}{3}.$$

$$367. \ln \frac{4}{3} - \frac{1}{6}. \quad 368. 1 - \ln 3. \quad 369. \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{2}{3}.$$

$$370. 0. \quad 371. \sqrt{3} - 1. \quad 372. \frac{\pi}{\sqrt{5}}. \quad 373. \frac{2}{3}. \quad 374. \frac{80\sqrt{3}}{27}.$$

$$375. \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}. \quad 376. \ln 2. \quad 377. 1 - \cos 1. \quad 378. \frac{\pi}{2}.$$

$$381. \ln 2. \quad 382. \frac{3}{4}. \quad 383. \frac{k}{1+k}. \quad 384. 2 \ln 2 - 1. \quad 385. e - 1.$$

$$386. 2. \quad 387. 1. \quad 391. \frac{\pi}{2}. \quad 392. \sqrt{2} - 2 \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right).$$

$$393. \sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln(2+\sqrt{3}). \quad 394. 4 - 2 \ln 3. \quad 395. \sqrt{3} - \arccos \frac{1}{2}.$$

396. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(2 - \sqrt{3})$. 397. $2\left(1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{7}\right)$.
398. $\frac{1}{5} \ln 112$. 399. $\frac{\sin \frac{\pi}{24}}{\sin \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{12}}$. 400. $2 \ln 2 - 1$.
401. $\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}$. 404. $1 - \frac{2}{e}$. 405. $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi \sqrt{3}}{9} +$
 $+\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$. 406. $-4\pi^2$. 407. $\frac{\pi a^2}{4}$.
408. $a^2 [\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})]$. 409. $\frac{1}{6}$. 410. $\frac{5 \ln 2 - 3}{2 \ln^2 x}$.
411. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. 412. $\frac{\pi}{2} - 1$. 413. $\frac{\pi}{2} - 1$.
415. $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(n-1)(n-3)\dots 3 \cdot 1}{n(n-2)\dots 4 \cdot 2} \quad (n=2m);$
 $\frac{(n-1)(n-3)\dots 4 \cdot 2}{m(m-2)\dots 5 \cdot 3 \cdot 1} \quad (n=2m+1).$
416. $\frac{(n-1)(n-3)\dots 4 \cdot 2}{(m+n)(m+n-2)\dots(m+3)(m+1)} \quad (n-\text{нечетное});$
 $\frac{(m-1)(m-3)\dots 4 \cdot 2}{(m+n)(m+n-2)\dots(n+3)(n+1)} \quad (m-\text{нечетное});$
 $\frac{(n-1)(n-3)\dots 3 \cdot 1 \cdot (m-1)(m-3)\dots 3 \cdot 1}{(m+n)(m+n-2)\dots(m+n-4)\dots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (m \text{ и } n - \text{четные}).$
418. $\frac{2048}{6435}$. 419. $\frac{46189}{524288} \pi$. 423. 0,96. 424. $\frac{4}{\ln 2}$.
425. $\frac{56}{3}$. 426. $\frac{65}{12}$. 427. 1. 428. $\frac{1}{6}$. 429. $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right)a^3$.
430. $\ln(2\sqrt{2} + \sqrt{10} - 2 - \sqrt{5})$. 431. $\frac{\pi a^2}{2}$. 432. $\ln \frac{7 + 2\sqrt{7}}{9}$.
433. $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$. 434. $\cos(\sin x) \cdot \cos x$. 435. $\frac{3}{x}$. 436. $\frac{t}{\ln t}$.
437. $\frac{\operatorname{tg} t}{2 t^2}$. 438. $x = 1$ (max), $x = -2$ (min).

$$439. x = 0 \text{ (min)}. \quad 440. e(3e - 2). \quad 441. 10 \ln 2 - \frac{17}{4}.$$

$$442. \frac{1 + 2^{\frac{\pi}{2}} \ln 2}{1 + \ln^2 2}.$$

Г л а в а IV

$$449. \frac{1}{2}. \quad 450. 2. \quad 451. \frac{8}{3}. \quad 452. \frac{17}{4}. \quad 453. \frac{4}{3} p^2.$$

$$454. \frac{24}{5} \sqrt{2}. \quad 455. \pi r^2. \quad 456. \pi ab.$$

$$457. \frac{1}{4} \left[6\sqrt{6} + \ln(5 + 2\sqrt{6}) \right]. \quad 458. \frac{3}{8} \pi a^2. \quad 459. 31,5 - 8 \ln 8.$$

$$460. 8,6. \quad 461. 0,950. \quad 462. 2\pi - \frac{2}{\sqrt{3}} \ln(2 + \sqrt{3}). \quad 463. \frac{3}{2} \pi ab.$$

$$464. 2a^2 \left(\pi - \frac{2}{3} \right). \quad 468. \pi. \quad 469. \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi c^4}{ab}.$$

$$470. 6\pi a^2. \quad 476. \pi a^2. \quad 477. \frac{a^2}{2}. \quad 478. \frac{\pi a^2}{2}.$$

$$479. \frac{\pi a^2}{8}. \quad 480. \frac{28}{3} \pi^3 a^2. \quad 481. 18 \pi a^2. \quad 482. \frac{3}{2} \pi a^2.$$

$$485. a \left(e - \frac{1}{e} \right). \quad 486. 2\sqrt{2} + \ln(3 + 2\sqrt{2}). \quad 487. 4a\sqrt{3}.$$

$$488. \frac{2\sqrt{2}}{9} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}). \quad 489. 6a. \quad 490. \frac{2a(11\sqrt{22} - 4)}{27}.$$

$$491. \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \ln 2 \right). \quad 492. \ln \frac{e^{2b} - 1}{e^{2a} - 1} + a - b. \quad 498. 6a.$$

$$499. 2\pi^2 a. \quad 500. a \left[\pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{1}{2} \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}) \right].$$

$$501. 2\pi a. \quad 502. a \left[\frac{\sqrt{1 + \varphi_1^2}}{\varphi_1} - \frac{\sqrt{1 + \varphi_2^2}}{\varphi_2} + \ln \frac{\varphi_2 + \sqrt{1 + \varphi_2^2}}{\varphi_1 + \sqrt{1 + \varphi_1^2}} \right].$$

$$506. \frac{1}{3} a^2 H. \quad 507. \frac{2}{3} R^2 H. \quad 513. \frac{\pi^2}{2}. \quad 514. 0,09 \pi.$$

515. $\frac{56}{15} \pi$. 516. $\frac{\pi a^3}{8} (e^2 + 4 - e^{-2})$. 517. $\frac{\pi a^5}{30}$.
518. 9375π . 519. $\frac{1}{20} \pi a^3$. 520. $\frac{32}{105} \pi a^3$. 521. $\frac{127}{7} \pi$.
522. $5\pi^2 a^3$. 523. $\frac{\pi a^3}{6} (3\pi^2 - 16)$. 524. $\frac{32}{105} \pi a b^2$.
530. $2\pi [\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]$. 531. $\pi r \sqrt{h^2 + r^2}$.
532. $\frac{12}{5} \pi a^2$. 533. 12π . 534. $24 \pi^2$. 535. $4\pi a^2$.
536. 3π . 537. $\frac{2\sqrt{2}\pi}{5} (e^\pi - 2)$. 539. $\frac{32}{5} \pi a^2$.
540. $2\pi a^2(2 - \sqrt{2})$. 541. $\frac{717}{75}$. 542. 72 . 543. $\frac{4 - \sqrt{2}}{6}$.
544. $\frac{8}{5} \sqrt{3}$. 545. $\frac{4}{3} a^2$. 546. $\frac{7}{50} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.
547. $\pi - 2$. 548. $\frac{12\sqrt{3}}{5}$. 549. $\frac{1}{3}$. 550. $\frac{5}{6} \sqrt{2} - \frac{2}{3}$.
551. $\frac{2}{243} (82\sqrt{82} - 1)$. 552. $\frac{1}{2} \pi r$. 553. $\frac{a}{2} (2 \ln 3 - 1)$.
554. $\sqrt{1 + e^2} - \sqrt{2} + \ln(\sqrt{1 + e^2} - 1)(\sqrt{2} + 1) - 1$. 555. $\ln 3$.
556. $\frac{28}{3}$. 557. $2 \ln 2 - \frac{2}{3}$. 558. $\frac{32}{35} \pi$. 559. $\frac{216}{5} \pi$.
560. $\frac{32}{3} \sqrt{2} \pi$. 561. $4 \sqrt{2} \pi$. 562. $\frac{256 \pi b^9}{315 a^6}$.
563. $(15 - 16 \ln 2) \frac{\pi a^3}{2}$. 564. $56 \pi^2$. 565. $\frac{16 \pi c^6}{105 a b^2}$.
566. $\frac{62}{3} \pi$. 567. $2\pi r h$. 568. $\frac{\pi a^2}{2} (e^2 + 4 - e^{-2})$.
569. $2\pi \left(1 + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\right)$. 570. $3\pi a^2$. 571. $\frac{12}{5} \pi a^2$.
572. $4\pi^2 a^2$.

Глава V

581. $K_x = \frac{1}{3} (5 \sqrt{5} - 1)$. $K_y = \frac{9}{8} \sqrt{5} + \frac{1}{16} \ln (2 + \sqrt{5})$.
582. $K_y = \frac{3}{5} a^2$. 583. $K_x = \sqrt{2} + \ln (1 + \sqrt{2})$. 584. а) $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{5}$,
 б) 0,15. 585. 24. 586. $\frac{1}{6} a^3$. 587. $I_x = \frac{37}{3} \sqrt{10}$, $I_y = \frac{7}{2} \sqrt{10}$.
588. $\frac{bH^3}{12}$. 589. $I_x = \frac{ab^2}{3}$, $I_y = \frac{a^3b}{3}$. 590. $\frac{a+3b}{12} h^3$. 591. $\frac{16}{105} ah^3$.
603. $\xi = \eta = \frac{2a}{\pi}$. 604. $\xi = \eta = \frac{2a}{5}$. 605. $\xi = 0$, $\eta = \frac{4b}{3\pi}$.
606. $\left(\frac{a}{5}; \frac{a}{5}\right)$. 607. $\left(\frac{5}{7} a; 0\right)$. 608. $\left(\frac{4}{5} a; \frac{2}{7} a^4\right)$.
609. $\left(\frac{8}{3\pi}; \frac{4}{\pi}\right)$. 610. $\left(\frac{5}{8} a; 0\right)$. 613. $\pi r d h^2 \Gamma$.
614. $\frac{1}{6} b h^2$. 615. $\frac{a+2b}{6} h^2 m$. 616. 4241 $\kappa \Gamma$.
619. $\frac{1}{12} \pi R^2 H^2$. 620. 240 $\pi \kappa \Gamma m$. 621. $\frac{4}{3} \pi R^4 \kappa \Gamma m$.
622. 0,234 $\kappa \Gamma m$. 623. 0,125 $\kappa \Gamma m$. 624. 250 $\pi R^4 \kappa \Gamma m$.
625. $\approx 37 \kappa \Gamma$. 626. $\left(0; \frac{2r}{\pi}\right)$. 627. $\left(0; \frac{4r}{3\pi}\right)$.
628. $\left(\frac{256a}{315\pi}; \frac{256a}{315\pi}\right)$. 629. $\left(\frac{5}{6} a; 0\right)$. 630. $\left(\frac{\sqrt{2}}{8} \pi a; 0\right)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
-----------------------	---

ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ (НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ)

Глава I. Основные способы интегрирования

§ 1. Способ непосредственного интегрирования	5
§ 2. Способ замены переменной (способ подстановки)	14
§ 3. Способ интегрирования по частям	23
§ 4. Интегралы вида $\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx$	31
§ 5. Интегралы вида $\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$	39

Глава II. Основные классы интегрируемых функций

§ 1. Интегрирование рациональных функций	43
§ 2. Интегрирование некоторых выражений, содержащих радикалы	60
§ 3. Интегрирование биномиальных дифференциалов	63
§ 4. Подстановки Эйлера	66
§ 5. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции	70

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Глава III. Вычисление определенных интегралов

§ 1. Вычисление непосредственным суммированием	91
§ 2. Вычисление определенных интегралов с помощью первообразных. Применение к вычислению рядов	107
§ 3. Замена переменной. Интегрирование по частям	116
§ 4. Приближенное интегрирование	125

Глава IV. Приложения определенного интеграла к геометрии

§ 1. Вычисление площадей	130
§ 2. Длина дуги плоской кривой	145
§ 3. Объем тела произвольной формы	149
§ 4. Объемы и поверхности тел вращения	151

Глава V. Приложения к вопросам физики

§ 1. Вычисление статических моментов и моментов инерции	164
§ 2. Вычисление координат центра тяжести плоских кривых и плоских тел. Теорема Гюльдена	172
§ 3. Разные задачи	180
Ответы	185

Анатолий Залманович Рывкин
Елена Сергеевна Куницкая
ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Редактор *В. Г. Долгополов*
Технический редактор *Г. Л. Татура*
Корректор *Т. Н. Смирнова*

* * *

Сдано в набор 26 /VII 1961 г. Подписано
к печати 18/XII 1961 г. $84 \times 108^{1/32}$.
Печ. л. 12,5 (10,25). Уч.-изд. л. 9,49.
Тираж 35 тыс. экз. Заказ № 2790.

* * *

Учпедгиз. Москва, 3-й проезд Марьиной
рощи, 41.

Полиграфкомбинат Саратовского совнацхоза
г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Цена 28 коп.

